

量子微腔中原子俘获的绝热微扰分析

王 成 张 力 孙昌璞

(东北师范大学物理系 理论物理研究所, 长春 130024)

摘 要 详尽地研究了驻波腔场中两能级原子运动的能量转移和动力学演化的非绝热修正。从而定量地阐述了实现原子俘获的绝热近似条件。

关键词 腔体量子电动力学, 原子俘获, 原子光学。

1 引 言

伴随着实验技术的提高,关于微腔中原子行为的腔体量子电动力学研究愈来愈受到人们的重视^[1]。为了制备静止原子、实现原子行为的人工控制,驻波腔场被用来俘获绝热运动的预冷却原子^[2]。完成逆斯特恩-盖拉赫实验^[3]。重要的是,绝热条件是进行这些实验的关键。为了定量地了解这个条件的确切物理含义,探索绝热条件破坏时的物理现象,有必要基于以前的高阶量子绝热近似(HOAA)进行较彻底的分析^[4~8]。事实上只有系统地、定量地计算非绝热微扰修正,才能阐述清楚绝热条件实现的物理机制而不只是满足定性的讨论。

本文的另一个目的是研究原子质心运动的绝热、非绝热效应对 Jynes-Cumming(J-C)模型相关的原子布居数反转、崩溃和回复现象的影响^[9]。

2 驻波场中两能级原子的高阶量子绝热近似分析

考虑以 $|g\rangle$, $|e\rangle$ 为基态和激发态的两能级原子,其能级差为 $\hbar\Omega$,它与频率为 ω_0 的单模驻波场耦合, a^+ 和 a 为腔场的产生、湮灭算子,在旋转波近似下,整个体系的哈密顿量为:

$$H = \hbar\omega_0 a^+ a + (1/2)\hbar\Omega(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + \zeta_0 \hbar \sin kz (a|e\rangle\langle g| + a^+ |g\rangle\langle e|) \quad (1)$$

其中 z 为原子的质心坐标, ζ_0 为电偶极耦合系数。引入极角坐标表示,则有

$$H = \hbar\omega_0 [n + \frac{1}{2}] I + \hbar\omega_n \begin{pmatrix} \cos \theta_n & \sin \theta_n \\ \sin \theta_n & -\cos \theta_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中: $\tan \theta_n = 2\zeta_0 \sin kz \sqrt{n+1}/\Delta$, $\Delta = \omega_0 - \Omega$, $\omega_n = \sqrt{\Delta^2/4 + \zeta_0^2 \sin^2 kz (n+1)}$

由此写下缀饰表象下的本征态 $|\varphi_{\pm}\rangle$ 和本征值 $E_{+,-}(n)$:

$$|\varphi_+\rangle = \cos(\theta_n/2) |g, n+1\rangle + \sin(\theta_n/2) |e, n\rangle,$$

$$|\varphi_-\rangle = -\sin(\theta_n/2) |g, n+1\rangle + \cos(\theta_n/2) |e, n\rangle$$

$$E_{+,-}(n) = (n+1/2)\hbar\omega_0 \pm \hbar \sqrt{\Delta^2/4 + \zeta_0^2 \sin^2 kz (n+1)} \quad (3)$$

注意到腔场在原子运动的尺度是非均匀的,在原子静止的确定运动参照系看来,原子经历了一个变化着的外场。 $z = z(t)$,其变化规律由相互作用决定。在一级近似下可写 $z(t) = z_0 + v_0 t$ 。其中 v_0 代表原子质心的初速度。因而 θ_n 和 E_n 是时变函数。基于高阶量子绝热近似理论,可设体系的波函数为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=+,-} C_n(t) \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t E_n dt'\right) |\varphi_n\rangle; \quad (4)$$

代入薛定谔(Schrodinger)方程可得到一个方程组

$$\dot{C}_+ = C_-(t) \frac{\dot{\theta}_n}{2} \exp\left(-\int_0^t \frac{E_+ - E_-}{i\hbar} dt'\right), \quad \dot{C}_- = -C_+(t) \frac{\dot{\theta}_n}{2} \exp\left(\int_0^t \frac{E_+ - E_-}{i\hbar} dt'\right) \quad (5)$$

这里主要利用了缀饰态的性质

$$\begin{aligned} \langle \varphi_+ | \varphi_+ \rangle &= \langle \varphi_- | \varphi_- \rangle = 1; & \langle \varphi_+ | \varphi_- \rangle &= 0, \\ |\dot{\varphi}_+ \rangle &= \frac{\dot{\theta}_n}{2} |\varphi_- \rangle; & |\dot{\varphi}_- \rangle &= -\frac{\dot{\theta}_n}{2} |\varphi_+ \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

如取初态为: $|g, n+1\rangle$, 经计算,一级近似解:

$$\begin{aligned} C_+^1 &= \frac{i}{\omega} \left(\sin \frac{\theta_n}{2}\right) \frac{\dot{\theta}_n}{2} \exp\left[-\frac{1}{i\hbar} \int_0^t (E_+ - E_-) dt'\right], \\ C_-^1 &= -\frac{i}{\omega} \left(\cos \frac{\theta_n}{2}\right) \frac{\dot{\theta}_n}{2} \exp\left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^t (E_+ - E_-) dt'\right] \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\omega = (E_+ - E_-)/\hbar$, 从而,得到非绝热的波函数为:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \left[\cos \frac{\theta_n}{2} \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t E_+ dt'\right) + \frac{i\dot{\theta}_n}{2\omega} \sin \frac{\theta_n}{2} \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t E_- dt'\right) \right] |\varphi_+ \rangle \\ &+ \left[-\sin \frac{\theta_n}{2} \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t E_- dt'\right) - \frac{i\dot{\theta}_n}{2\omega} \cos \frac{\theta_n}{2} \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t E_+ dt'\right) \right] |\varphi_- \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

式中含 $\dot{\theta}_n$ 的项是考虑高阶量子绝热近似后的修正。

3 非绝热跃迁几率的能量分析

由于 $\langle e, n | \varphi_+ \rangle = \sin(\theta_n/2)$; $\langle e, n | \varphi_- \rangle = \cos(\theta_n/2)$, 考虑到非绝热项的影响,从初态 $|g, n+1\rangle$ 到 $|e, n\rangle$ 态的跃迁几率是

$$\begin{aligned} |\langle e, n | \psi(t) \rangle|^2 &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta_n [1 - \cos \Omega'(t)] + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\theta}_n}{2\omega}\right) \sin 2\theta_n \sin \Omega'(t) \\ &+ \left(\frac{\dot{\theta}_n}{2\omega}\right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_n [1 + \cos \Omega'(t)] \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\Omega'(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t (E_+ - E_-) dt'.$$

(9)式可以看出第一项是绝热近似下从初态跃迁到态 $|e, n\rangle$ 的几率,第二项、第三项是非绝热项对跃迁几率的贡献。

在任意时刻 t 原子能量的平均值

$$\frac{1}{2} \hbar \Omega \langle \psi(t) | e, n \rangle \langle e, n | \psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | g, n+1 \rangle \langle g, n+1 | \psi(t) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \hbar \Omega \{ [-\cos^2 \theta_n - \sin^2 \theta_n \cos \Omega'(t)] + (\frac{\dot{\theta}_n}{2\omega}) \sin 2\theta \sin \Omega'(t) \\
&\quad + (\frac{\dot{\theta}_n}{2\omega})^2 [\cos^2 \theta_n - \sin^2 \theta_n \cos \Omega'(t)] \} \quad (10)
\end{aligned}$$

而光场能量的平均值是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \hbar \omega_0 \langle \psi(t) | a^+ a | \psi(t) \rangle \\
&= \hbar \omega_0 \{ [(n+1) - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_n + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_n \cos \Omega'(t)] - (\frac{\dot{\theta}_n}{2\omega}) \cos \theta_n \sin \theta_n \sin \Omega'(t) \\
&\quad + (\frac{\dot{\theta}_n}{2\omega})^2 [n + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_n + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_n \cos \Omega'(t)] \} \quad (11)
\end{aligned}$$

为了分析相互作用过程中的能量转移问题, 还需要计算相互作用能量的平均值

$$\begin{aligned}
&\hbar \xi_0 \sin kz \langle \psi(t) | (|g, n+1\rangle \langle e, n| a^+ + |e, n\rangle \langle g, n+1| a) | \psi(t) \rangle \\
&= \hbar \xi_0 \sin kz (n+1)^{1/2} \{ \sin \theta_n \cos \theta_n [1 - \cos \Omega'(t)] - (\frac{\dot{\theta}_n}{2\omega}) 2 \sin^2 \theta_n \sin \Omega'(t) \\
&\quad - (\frac{\dot{\theta}_n}{2\omega})^2 \cos \theta_n \sin \theta_n [1 + \cos \Omega'(t)] \} \quad (12)
\end{aligned}$$

上述结果表明: 若不考虑高阶量子绝热近似, 即取 $\dot{\theta}$ 为零, 则方程回归至绝热近似的结果。这时能量为

$$\hbar \xi_0 \sin kz (n+1)^{1/2} \sin \theta_n \cos \theta_n [1 - \cos \Omega'(t)]$$

此外, 若将任意时刻三部分能量相加所得到的能量与初态时的能量相比较, 将会发现能量是不守恒的。如果不与外界交换能量, 则能量的增加值是由原子的机械运动能量来补充的。这可能导致了原子的致冷和捕获。一个严格的理论应考虑动能项对原子动力学的贡献。那时 $z = z(t)$ 的变化规律同原子质心, 电子运动和光场耦合的量子动力学决定, 一级近似 $z(t) = z_0 + v_0 t$ 不再适用, 那时能量守恒自然成立。不过, 仅就最低级近似而言, 本文分析足已详尽讨论原子俘获的绝热近似条件。

4 绝热条件分析

通过上面的理论计算和分析可得这样的结论: 引起非绝热的修正项因子为 $|\dot{\theta}/\omega|$, 若

$$\left| \frac{\dot{\theta}}{\omega} \right| = \left| \frac{2\Delta \sqrt{n+1} \xi_0 k v \cos(kvt)}{[\Delta^2 + 4\xi_0^2 (n+1)^2 \sin^2(kvt)]^{3/2}} \right| \ll 1 \quad (13)$$

则绝热近似成立。对于典型的里德堡(Redberg)原子^[2]: $n = 50$; $\xi_0 = 4.2 \times 10^5$, 从(13)式可以看出, 绝热条件的成立与原子在腔中的位置, 原子质心运动的速度、 $|\Delta|$ 和 ξ_0 的关系有关。下面就几种典型情形讨论一下:

1) 在大失谐时, 即在 $|\Delta| \gg \xi_0$ 时, $|\dot{\theta}_n/\omega| \ll 1$ 的绝热近似是无条件成立的。

2) 在小失谐时, 即在 $|\Delta| \ll \xi_0$ 时, 绝热近似是基本可以满足的。但是在 $|\Delta| \approx 10^3 \sim 10^4$ Hz 时, 绝热条件的成立是与原子的位置有关, 在边缘处(满足 $\sin(kvt) < 10^{-2}$), 绝热条件将被破坏。

3) 在 $\Delta \approx \xi_0 = 10^5$ 时, 若 $T = 3.2 \mu\text{K}$, 那么质心速率 $v = 0.25 \text{ m/s}$ ^[2], 此时 $|\dot{\theta}_n/\omega|$ 随腔中位置的变化如图 1 所示。从图 1 可以看出; 在 $\sin kz < 0.1$ 区域内, 绝热条件被破坏, 此时需要考虑非绝热项对原子的影响。

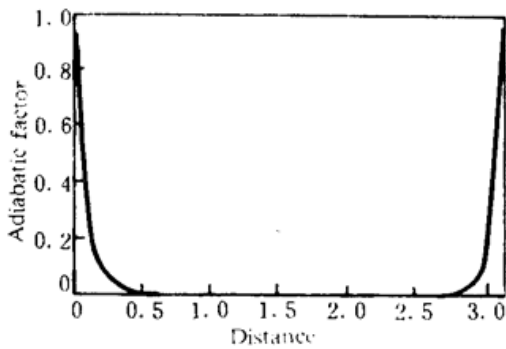


Fig. 1 Drawing of adiabatic condition

随着热力学温度的升高,质心运动速度的增大,绝热条件被破坏的范围和程度都将增加:若 $v = 2.5 \text{ m/s}$ (对应 $T = 3.2 \times 10^{-4} \text{ K}$) 在 $\sin kz < 0.3$ 区域内绝热条件被破坏;若 $v = 25 \text{ m/s}$ (对应 $T = 3.2 \times 10^{-2} \text{ K}$) 在 $\sin kz < 0.5$ 区域内绝热条件被破坏。上述情况都应考虑绝热效应的影响。若 $v = 250 \text{ m/s}$ (对应 $T = 3.2 \text{ K}$), 在腔边缘处, 准绝热近似亦被破坏。

结 论 本文以 J-C 模型为对象, 详细计算了在准绝热条件下的波函数形式, 初态取为可以在实验上置备的 $|g, n+1\rangle$ 。从而本文的内容不仅具有理论价值, 而且具有指导实验的意义。本文还详尽讨论了绝热近似和一阶近似的条件, 并指出了两者分别成立的条件与范围。此外, 本文计算了一阶近似下的跃迁几率和同样条件下能量可观测值(平均值)的分布。

参 考 文 献

- [1] P. R. Berman, (ed.), *Cavity Quantum Electrodynamics*. Academic Press, INC, New York, 1994
- [2] S. Haroche, M. Brune, J. M. Raimond, Trapping atoms by the vacuum field in a cavity. *Euro Phys. Lett.*, 1991, 14(1): 19~24
- [3] E. Arimondo, W. D. Phillips, F. Strumia, *Laser Manipulation of Atoms and Ions*. North Holland, Amsterdam, 1992
- [4] C. P. Sun, High-order quantum adiabatic approximations and Berry's phase factor. *J. Phys. A*, 1988, 21(4): 1595~1599
- [5] Y. Z. Wang, Y. D. Cheng, W. Q. Cai, Collimation of an atomic beam using retarded dipole force. *Opt. Commun.*, 1989, 76(6): 462~466
- [6] C. P. Sun, High-order adiabatic approximation related to non-Abelian Berry's phase factors and nuclear quadrupole resonance. *Phys. Rev. (D)*, 1990, 41(4): 1318~1322
- [7] C. P. Sun, High-order adiabatic approximation for non-Hermitian Quantum system and complexization of Berry's phase. *Phys. Scripta*, 1993, 48(4): 393~398
- [8] X. G. Wang, C. P. Sun, Effect of the motion of mass center on exactly-solvable dynamics of the atom in an inhomogeneous field. *J. Mod. Optics*, 1995, 42(3): 515~521
- [9] C. Hong, L. Mander, Higher-order squeezing of a quantum field. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, 54(4): 323~325

Analysis of Adiabatic Disturbing for Atom Capture in Cavity

Wang Cheng Zhang Li Sun Changpu

(Physics Department, Northeast Normal University, Changchun 130024)

(Received 3 May 1995)

Abstract The paper analyse non-adiabatic modification of energy transition and dynamic evolution for two-level atom in cavity with quantum high order adiabatic approximation (HOAA). The approximative condition for atom capture is described quantitatively.

Key words cavity quantum electrodynamics, atom capture, atomic optics.