

负关联噪声驱动下单模激光的定态分析*

魏学勤 曹力 吴大进

(华中理工大学激光技术国家实验室和物理系, 武汉 430074)

摘 要 研究了负关联的加法和乘法高斯白噪声驱动下单模激光损失模型的定态情况。文中推导了负关联情况下, 定态时的激光场幅的几率分布, 光强的平均值, 光强的协方差以及光强的偏斜率。并和文献[1, 2]中正关联时的定态分析作了比较, 发现了有意义的新现象。

关键词 单模激光损失模型, 加法高斯白噪声, 乘法高斯白噪声, 协方差, 偏斜率。

噪声普遍存在于客观世界中, 不同程度地影响着每一个宏观系统。尤其在非平衡系统中, 噪声的影响尤为重要。在激光系统中, 噪声或大或小地影响着激光的统计性质。最为显著的是在染料激光中, 噪声对其统计性质有着重要的影响^[3~5]。噪声可以分为加法和乘法噪声两类。在朗之万(Langevin)方程中由于加法和乘法噪声一般出于不同的源, 故二噪声之间是统计独立的。但是若两噪声出于同一源, 它们之间就不再是没有关联的了。在文献[1, 2]中, 该文作者研究了正关联的加法和乘法高斯白噪声时的情况。然而作为出于同一源的噪声之间, 可以有负关联的情况, 此类情况在激光中的量子噪声之间就曾出现。

本文研究了负关联的加法和乘法高斯白噪声的单模激光损失模型, 求解了对应的福克-普朗克方程的定态解, 以及定态时的光强的平均值, 协方差, 偏斜率的数值解, 与文献[1, 2]中正关联的情况作了比较, 发现负关联时出现一些有意义的新现象。

1 负关联时单模激光的定态解

包含有加法和乘法噪声的单模激光损失模型的朗之万方程为^[1]:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^3 + \frac{a}{2x} + x\zeta(t) + \eta(t), \quad b > 0 \quad (1)$$

式中光强 $I = x^2$, a 和 b 为净增益系数和自饱和系数。 $\zeta(t)$ 和 $\eta(t)$ 为乘法和加法噪声, 并满足:

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = D\delta(t-t'), \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \alpha\delta(t-t'), \quad \langle \zeta(t)\eta(t') \rangle = \langle \eta(t)\zeta(t') \rangle = \lambda \sqrt{\alpha D} \delta(t-t'), \\ -1 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

式中 λ 的大小表示两噪声之间的关联程度。 λ 的正负不影响文献[6]中的推导, 故应用文献[6]

* 国家自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1995年1月16日; 收到修改稿日期: 1995年5月2日

得到(1)式对应的福克-普朗克方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x) P(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x) P(x, t). \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} D^{(1)}(x) &= (a + \gamma D/2)x - bx^2 + (\gamma\lambda/2) \sqrt{aD} + \alpha/2x. \\ D^{(2)}(x) &= Dx^2 + 2\lambda \sqrt{aD}x + \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 $\gamma = 0$ 为 Ito 积分, $\gamma = 1$ 为 Stratonovich 积分。在本文中 $\gamma = 1$ 。则定态概率分布为:

$$P_{st}(x) = \frac{N}{D^{(2)}(x)} \exp \left[- \int^x \frac{2D^{(1)}(x')}{D^{(2)}(x')} dx' \right]. \quad (5)$$

由(4)式, (5)式得到:

1.1 定态概率分布的解析表达式

1) 当 $-1 < \lambda < 1$ 时, 有:

$$P_{st}(x) = N x (Dx^2 + \alpha + 2\lambda \sqrt{aD}x)^{c-1} D^{-c} \exp \left\{ - \frac{b}{D} x^2 + \frac{4b\lambda}{D} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} x - \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left[\frac{2a}{D} + \frac{2ba}{D^2} (3-4\lambda^2) + 1 \right] \arctan \left[\frac{\sqrt{D/\alpha} x + \lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right] \right\}. \quad (6)$$

2) 当 $\lambda = -1$ 和 $\lambda = 1$ 时, 有:

$$P_{st}(x) = N x (Dx^2 + \alpha + 2\lambda \sqrt{aD}x)^{c-1} D^{-c} \times \exp \left\{ - \frac{b}{D} x^2 + \frac{4b\lambda}{D} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} x - \lambda \left(\frac{2a}{D} - \frac{2ba}{D^2} - 1 \right) \frac{\sqrt{a/D}}{x + \lambda \sqrt{a/D}} \right\}. \quad (7)$$

式中 $c = [(a/D) + (\gamma/2)] + (ba/D)(1-4\lambda^2) - (1/2)$, N 为归一化常数。

1.2 定态时光强 I 的 n 次方平均值:

$$\langle I^n \rangle = \langle x^{2n} \rangle = \int_0^\infty x^{2n} P_{st}(x) dx \quad (8)$$

$n = 1$ 时为光强的平均值:

$$\langle I \rangle = \langle x^2 \rangle = \int_0^\infty x^2 P_{st}(x) dx \quad (9)$$

归一化后光强的协方差和偏斜率为:

$$\lambda_2(0) = \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2 - 1, \quad \lambda_3(0) = \langle I^3 \rangle / \langle I \rangle^3 - 3\lambda_2(0) - 1 \quad (10)$$

2 讨 论

对于 $\lambda \geq 0$ 的情况, 文献[1]中均已作了分析, 本文只讨论负关联($\lambda < 0$)的情况, 并与文献[1, 2]中 $\lambda \geq 0$ 时的情况作了比较。

2.1 负关联使激光中的涨落减小

首先, 在负关联情况下激光场幅的定态概率分布, 其解析表达式如(6)式, (7)式。如图 1 所示, 可见, 负关联时定态几率分布曲线比无关联和正关联时更加尖锐, 说明此时出现的涨落较小。而 $\lambda = -1$, 即完全负关联情况下, 由图 2 可见出现了一连续的小峰和 δ 函数分布的情况。由 $\lambda = -1$ 时的极值方程:

$$2bx^4 - (2a - 3D)x^2 - 3\sqrt{aD}x - a = 0. \quad (11)$$

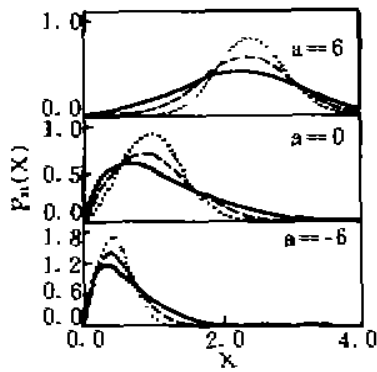


Fig. 1 Stationary probability distribution of the laser field amplitude (normalized). $b = 1, \alpha = 2.0, D = 1.32$, —, $\lambda = 1$; ----, $\lambda = 0$; ·····, $\lambda = -0.5$

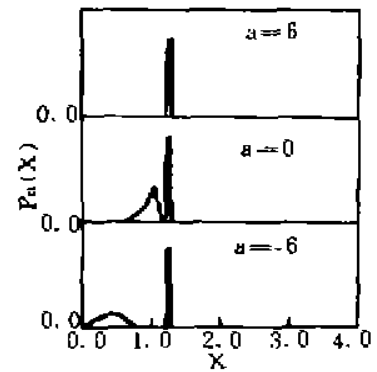


Fig. 2 Stationary probability distribution of the laser field amplitude. $b = 1, \alpha = 2.0, D = 1.32, \lambda = -1$

应用笛卡尔符号法则^[7]判断, (11)式在 $x > 0$ 时有一极值, 故存在连续的小峰结构是正常的。至于 $x = \sqrt{\alpha/D}$ 时, $D^{(2)}(x) = 0$ ($x \neq \sqrt{\alpha/D}$ 时, $D^{(2)}(x) > 0$), 则过渡到确定论过程, 概率分布 (7) 式在 $x \rightarrow \sqrt{\alpha/D}$ 时, 呈现 δ 函数分布, 这是完全负相关所特有的现象。

其次, 由光强的协方差 $\lambda_2(0)$ 和偏斜率 $\lambda_3(0)$ 与净增益系数 α 的关系曲线如图 3、图 4 所示, 可以发现, λ 为负时, $\lambda_2(0)$ 和 $\lambda_3(0)$ 比 λ 为正和为零时要小。这也说明负关联时涨落减小。

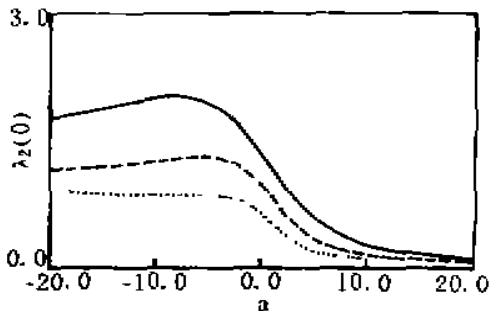


Fig. 3 The normalized steady-state variance of the laser intensity as a function of the net gain coefficient α with $b = 1, \alpha = 2.0$ and $D = 1.32$, —, $\lambda = 1$; ----, $\lambda = 0$; ·····, $\lambda = -0.5$

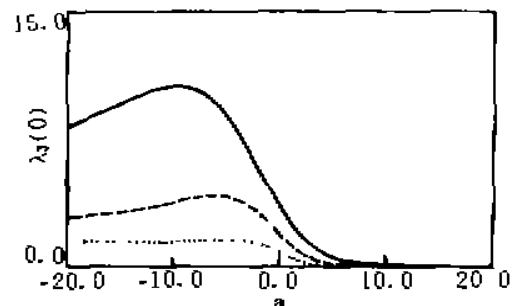


Fig. 4 The normalized steady-state skewness of the laser intensity as a function of the net gain coefficient α with $b = 1, \alpha = 2.0$ and $D = 1.32$, —, $\lambda = 1$; ----, $\lambda = 0$; ·····, $\lambda = -0.5$

在图 3、图 4 中, 还可以看到, 在阈值下及其附近, 涨落较大。而大于阈值后, $\lambda_2(0)$ 和 $\lambda_3(0)$ 迅速趋于零, 涨落迅速降低。

2.2 光强的平均值在不同工作点处的特性

光强的平均值 $\langle I \rangle$ 和净增益系数 α 的关系如图 5 所示。在阈值下及其附近, λ 的增加使 $\langle I \rangle$ 增加。这一现象和正关联时相同^[1, 2]。与正关联时不同的新现象是: 在高于阈值的工作点处, 负关联时光强的平均值 $\langle I \rangle$ 比正关联时的光强的平均值 $\langle I \rangle$ 略大。噪声负关联使得光强的平均值略有增加。

2.3 一个有意义的新现象

负关联时光强的协方差同光强的平均值的关系如图 6 所示, 其中图 6 右上角为虚线框部分的放大图。发现 $\lambda \geq 0$ 时, $\lambda_2(0) - \langle I \rangle$ 曲线在 $x > 0$ 处有一峰值。而当 $\lambda < 0$, 且在适当

的参数值下, 由图 6 中可见, 在 $0.04 \sim 0.5$ 区间内, $\lambda_2(0)$ 随 $\langle I \rangle$ 的变化很小, 出现一平台。在 $x < 0.04$ 以后, $\lambda_2(0)$ 迅速趋于零, 曲线在 0.038 处不连续。

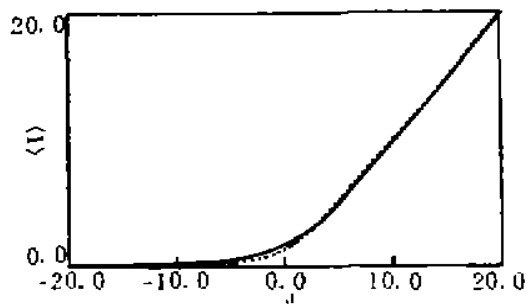


Fig. 5 The mean steady-state laser intensity $\langle I \rangle$ as a function of the net gain coefficient a with $b = 1$, $\alpha = 2.0$ and $D = 1.32$, —, $\lambda = 1$; ----, $\lambda = 0$; ·····, $\lambda = -0.5$

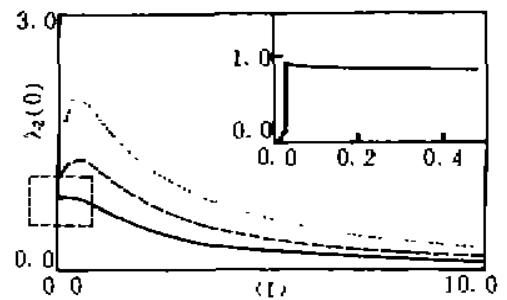


Fig. 6 The normalized steady-state variance of the laser intensity as a function of the mean steady-state laser intensity $\langle I \rangle$, with $b = 1$, $\alpha = 2.0$ and $D = 1.32$, —, $\lambda = -0.5$; ----, $\lambda = 0$; ·····, $\lambda = 1$

参 考 文 献

- [1] Shiqun Zhu, Steady-state analysis of a single-mode laser with correlations between additive and multiplicative noise. *Phys. Rev. A*, 1993, 47(3): 2450~2408
- [2] 朱士群, 印建平, 陈玉华, 噪声之间的耦合对一维激光场的影响. *光学学报*, 1994, 14(9): 951~955
- [3] M. Aguado, E. Hernández-García, M. San Miguel, Dye-laser fluctuations: comparison of colored loss-noise and white gain-noise models. *Phys. Rev. A*, 1988, 38(11): 5670~5677
- [4] Ronald F. Fox, Rajarshi Roy, Steady-state analysis of strongly colored multiplicative noise in a dye laser. *Phys. Rev. A*, 1987, 35(4): 1838~1842
- [5] Ling Lin, Li Cao, Da-jin Wu, First-order-like transition of dye laser colored gain model. *Commun. Theor. Phys.*, 1993, 20(1): 41~48
- [6] Li Cao, Da-jin Wu, Stochastic dynamics for systems driven by correlated noises. *Phys. Lett. A*, 1994, 185(1): 59~64
- [7] 《数学手册》编写组, 数学手册, 北京, 高等教育出版社, 1979: 97

Steady-State Analysis of a Single-Mode Laser Driven by Negative Correlated Noises

Wei Xueqin Cao Li Wu Dajin

(National Laboratory of Laser Technology and Department of Physics,
Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

(Received 16 January 1995; revised 2 May 1995)

Abstract The steady-state of a single-mode laser driven by additive and multiplicative noises with an arbitrary degree of negative correlation is studied. With negative correlation, the mean, variance and skewness of the steady-state laser intensity are calculated. Comparing with the situation of positive correlation, some significant phenomenon are found.

Key words loss-noise single-mode laser model, additive Gaussian white noise, multiplicative Gaussian white noise, variance, skewness.