第 16 卷 第 3 期 光 学 学 报 Vol. 16, No. 3
1996 年 3 月 ACTA OPTICA SINICA March, 1996

# 高斯-谢尔模型光束的变换特性*

张 彬 吕百达 蔡邦维
(四川大学光电科学技术系，成都 610064)

**摘 要** 在一般情况下推导出高斯-谢尔模型光束经 *ABCD* 光学系统变换后的相干模迭加表示式。

**关键词** 高斯-谢尔模型光束， *ABCD* 光学系统， 相干模， 变换特性。

近年来，描述部份相干光的高斯-谢尔模型(GSM)光束引起了广泛的兴趣[1,2]。本文的主要目的是在柱坐标系下将二维高斯-谢尔模型源表示成拉盖尔-高斯模的迭加，利用衍射积分理论，推导出高斯-谢尔模型光束经 *ABCD* 光学系统的变换公式，并将有关结果表示为相干模的迭加形式。

## 1 二维高斯-谢尔模型源的相干模表示

在柱坐标系下，$z=0$ 处的二维高斯-谢尔模型源的交叉谱密度函数为[2]：

$$W(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = I_0 \exp\left(-\frac{r_1^2 + r_2^2}{w_0^2}\right) \exp\left[-\frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2\sigma_0^2}\right]. \tag{1}$$

式中，$w_0$、$\sigma_0$ 分别表示高斯-谢尔模型源的光腰尺寸和相关长度，$I_0$ 为一常数。

交叉谱密度函数又可表示成[1]：

$$W(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=-p}^{p} \lambda_{pl}\, \phi_{pl}^*(r_1, \theta_1)\, \phi_{pl}(r_2, \theta_2) \tag{2}$$

式中，$\phi_{pl}(r, \theta)$ 为积分方程

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} W(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)\, \phi_{pl}(r_1, \theta_1)\, r_1 \mathrm{d}r_1 \mathrm{d}\theta_1 = \lambda_{pl} \phi_{pl}(r_2, \theta_2) \tag{3}$$

的正义归一化本征函数，$\lambda_{pl}$ 为相应的本征值，* 表示复共轭。将(1)式代入(3)式，并令

$$\phi_{pl}(r_j, \theta_j) = u_{pl}(r_j) \exp(-il\theta_j), \qquad (j = 1, 2)$$

$$a = 1/w_0^2, \qquad b = 1/2\sigma_0^2, \qquad c = \sqrt{a^2 + 2ab}.$$

可以证明

$$\phi_{pl}(r, \theta) = \sqrt{\frac{4cp!}{\Gamma(p+l+1)}}\, (\sqrt{2c}\, r)^l \exp(-cr^2)\, \mathrm{L}_p^l(2cr^2) \exp(-il\theta) \tag{4}$$

---

* 国家科委 863 高科技项目。

收稿日期：1994 年 10 月 10 日；收到修改稿日期：1995 年 3 月 15 日

为(3)式的本征函数，相应的本征值为

$$\lambda_{pl}=I_0\left(\frac{\pi}{a+b+c}\right)\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^{2p-l}. \tag{5}$$

于是，(2)式可表示成

$$W(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{l=-p}^{p}I_0\left(\frac{\pi}{a+b+c}\right)\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^{2p+l}\frac{4cp!}{\Gamma(p+l+1)}(\sqrt{2c}r_1)^l\exp(-cr_1^2)$$
$$\times L_p^l(2cr_1^2)\exp(il\theta_1)(\sqrt{2c}r_2)^l\exp(-cr_2^2)L_p^l(2cr_2^2)\exp(-il\theta_2). \tag{6}$$

(6)式为二维高斯-谢尔模型源在柱坐标系下的拉盖尔-高斯模的迭加表示式。式中，$L_p^l$ 为缔合拉盖尔多项式，Γ 为 Γ 函数。

## 2　高斯-谢尔模型光束通过 *ABCD* 光学系统变换后的相干模表示

分为直角坐标和柱坐标两种情况加以讨论。在直角坐标系下，源处的交叉谱密度函数可以表示成厄米-高斯相干模的迭加[1]，即

$$W_0(x_1',x_2')=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{0m}\phi_{0m}^*(x_1')\phi_{0m}(x_2'). \tag{7}$$

式中，

$$\phi_{0m}(x')=(2c_0/\pi)^{1/4}(2^m m!)^{-1/2}H_m(\sqrt{2c_0}x')\exp(-c_0x'^2)$$

$$\lambda_{0m}=I_0\left(\frac{\pi}{a_0+b_0+c_0}\right)^{1/2}\left(\frac{b_0}{a_0+b_0+c_0}\right)^m,$$

$$a_0=\frac{1}{w_0^2},\qquad b_0=\frac{1}{2\sigma_0^2},\qquad c_0=\sqrt{a_0^2+2a_0b_0},$$

$H_m$ 为 $m$ 阶厄米多项式。高斯 - 谢尔模型光束经 *ABCD* 光学系统变换后的交叉谱密度函数为[3]：

$$W_1(x_1,x_2)=\frac{k}{2\pi B}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_0(x_1',x_2')\exp\{-(ik/2B)[A(x_1'^2-x_2'^2)-2(x_1x_1'-x_2x_2')$$
$$+D(x_1^2-x_2^2)]\}\,dx_1'dx_2'. \tag{8}$$

将(7)式代入(8)式，积分之，得：

$$W_1(x_1,x_2)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{0m}\frac{(2c_1/\pi)^{1/2}}{2^m m!}H_m(\sqrt{2c_1}x_1)\exp(-c_1x_1^2)\exp(-ikx_1^2/2R_1)$$
$$\times H_m(\sqrt{2c_1}x_2)\exp(-c_1x_2^2)\exp(ikx_2^2/2R_1). \tag{9}$$

又因

$$W_1(x_1,x_2)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{1m}\phi_{1m}^*(x_1)\phi_{1m}(x_2), \tag{10}$$

于是，相应的本征函数为：

$$\phi_m(x)=(2c_1/\pi)^{1/4}(2^m m!)^{-1/2}H_m(\sqrt{2c_1}x)\exp(-c_1x^2)\exp(ikx^2/2R_1), \tag{11}$$

本征值为

$$\lambda_{1m}=\lambda_{0m}=\lambda_m. \tag{12}$$

式中

$$c_1=\frac{c_0}{A^2+4B^2c_0^2/k^2},\qquad R_1=\frac{A^2+4B^2c_0^2/k^2}{AC+4BDc_0^2/k^2},\quad (\text{等相面曲率半径}) \tag{13}$$

且相干参数 $\beta$ 保持不变，即

$$\beta = (1 + \frac{2b_0}{a_0})^{-1/2} = (1 + \frac{2b_1}{a_1})^{-1/2}. \tag{14}$$

(9)式为直角坐标系下，一维高斯-谢尔模型光束经 *ABCD* 光学系统变换后的厄米-高斯相干模迭加表示式。

定义 $q^{-1}$ 参数，

$$\frac{1}{q_j} = \frac{1}{R_j} - \frac{i\lambda}{\pi c_j} \qquad (j = 0,\ 1,\ \text{且}\ R_0 \to \infty) \tag{15}$$

利用(13)式，易证 *ABCD* 定律成立，

$$q_1 = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D}. \tag{16}$$

由上述推导可知，高斯-谢尔模型光束经 *ABCD* 光学系统变换后，本征值 $\lambda_m$ 和相干参数 $\beta$ 均保持不变，本征函数在形式上与源处相同，只是对应的参数发生了变化，且 $q^{-1}$ 参数遵从 *ABCD* 定律。不难看出，上述结果推广到 $x$、$y$ 可分离的二维情况是直截了当的，限于篇幅，本文从略。

现在讨论柱坐标系情况。由前面分析知，源处的交叉谱密度函数可以表示成拉盖尔-高斯模的迭加

$$W_0(r_1', \theta_1', r_2', \theta_2') = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=-p}^{p} \lambda_{0pl}\, \phi_{0pl}^*(r_1', \theta_1')\, \phi_{0pl}(r_2', \theta_2') \tag{17}$$

式中
$$\phi_{0pl}(r', \theta') = \sqrt{\frac{4c_0 p!}{\Gamma(p+l+1)}}\, (\sqrt{2c_0}r')^l \exp(-c_0 r'^2)\, \mathrm{L}_p^l(2c_0 r'^2) \exp(-il\theta'),$$

$$\lambda_{0pl} = I_0 (\frac{\pi}{a_0 + b_0 + c_0})\, (\frac{b_0}{a_0 + b_0 + c_0})^{2p+l},$$

$$a_0 = \frac{1}{w_0^2}, \qquad b_0 = \frac{1}{2\sigma_0^2}, \qquad c_0 = \sqrt{a_0^2 + 2a_0 b_0}.$$

经 *ABCD* 光学系统变换后高斯-谢尔模型光束的交叉谱密度函数为

$$\begin{aligned} W_1(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = {} & (\frac{k}{2\pi B})^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} W_0(r_1', \theta_1', r_2', \theta_2') \exp\{-\frac{ik}{2B}[A(r_1'^2 - r_2'^2) \\ & - 2[r_1 r_1' \cos(\theta_1 - \theta_1') - r_2 r_2' \cos(\theta_2 - \theta_2')] \\ & + D(r_1^2 - r_2^2)]\}\, r_1' r_2' \mathrm{d}r_1' \mathrm{d}\theta_1' \mathrm{d}r_2' \mathrm{d}\theta_2' \end{aligned} \tag{18}$$

将(17)式代入(18)式，积分后，结果可整理为：

$$W_1(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=-p}^{p} \lambda_{1pl}\, \phi_{1pl}^*(r, \theta_1)\, \phi_{1pl}(r_2, \theta_2), \tag{19}$$

对应的本征值函数为：

$$\phi_{1pl}(r, \theta) = \sqrt{\frac{4c_1 p!}{\Gamma(p+l+1)}}\, (\sqrt{2c_1}r)^l \exp(-c_1 r^2)\, \mathrm{L}_p^l(2c_1 r^2) \exp(-il\theta) \exp(\frac{ikr^2}{2R_1}), \tag{20}$$

和本征值为：

$$\lambda_{1pl} = \lambda_{0pl} = \lambda_{pl}. \tag{21}$$

式中，$c_1$、$R_1$ 由(13)式确定。可以证明 $q^{-1}$ 参数满足 *ABCD* 定律。(19)式为二维高斯-谢尔模型光束经 *ABCD* 光学系统变换后的拉盖尔-高斯模迭加表示式。

**结　论**　本文推广了文献[1]的结果，给出了高斯-谢尔模型光束通过 *ABCD* 光学系统变换后的相干模表示，所得结果有较为普遍性意义。本文所用方法和有关结果不难推广用于研究二维高斯-谢尔模型光束的模分解和各向异性高斯-谢尔模型的相干模表示等问题。

## 参 考 文 献

[1] A. Starikov, E. Wolf, Coherent-mode representation of Gaussian Schell-model sources and their radiation fields. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(7): 923～928

[2] 吕百达，张　彬，蔡邦维，Focusing of a Gaussian Schell-model beam through a circular lens. *J. Mod. Opt.*, 1995, **42**(2): 289～298

[3] T. Shirai, T. Asakura, Spatial coherence of light generated from a patially coherent light and its control using a source filter. *Optik*, 1993, **94**(1): 1～15

# Transformation Properties of Gaussion Schell-Model Beams

Zhang Bin　　Lu Baida　　Cai Bangwei

(*Department of Opto-Electronic Science and Technology, Sichuan University, Chengdu* 610064)

(Received 10 October 1994; revised 15 March 1995)

**Abstract**　In general case a Gaussian Schell-model (GSM) beam passing through *ABCD* optical systems is represented by the superposition of coherent modes.

**Key words**　Gaussian Schell-model (GSM) beams, *ABCD* optical system, coherent mode, transformation properties.