第 16 卷 第 3 期　　光 学 学 报　　Vol. 16, No. 3
1996 年 3 月　　ACTA OPTICA SINICA　　March, 1996

光束截面的动量守恒及动量衍射发散度

曹 清　郭 弘　邓锡铭
（中国科学院上海光学精密机械研究所，上海 201800）

摘　要　在忽略了瞬逝波的条件下，证明真空中单色标量光场的光束截面的动量及其任一分量都与轴向坐标无关，为守恒量；文中还给出了动量衍射发散度的表达式。

关键词　光流体模型，　光束截面动量，　动量衍射发散度。

在文献[1～3]所描述的光流体模型中，引入了光束截面的动量及动量衍射发散度的概念。本文将在上述各工作的基础上来进一步证明一些参量特性。

1　光束截面动量的径向分量为守恒量

由文献[1～3]可知，光束截面的动量 $\boldsymbol{P}$ 可表示为

$$\boldsymbol{P}=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{\omega}\,\phi^{*}\nabla\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

$$\phi=\phi_0\exp(ikL) \tag{2}$$

式中 ϕ 为标量光场的复振幅分布函数，且 ϕ_0、L 均为 $(x、y、z)$ 的实函数。由(1)式可知，$\boldsymbol{P}$ 的径向分量 $\boldsymbol{P}_{\perp}$ 及轴向分量 $\boldsymbol{P}_{\parallel}$ 可分别表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{\perp}&=\frac{i}{\omega}\iint_{-\infty}^{\infty}\phi^{*}(\nabla\phi)_{\perp}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\boldsymbol{e}_1\left[\frac{i}{\omega}\iint_{-\infty}^{\infty}\phi^{*}\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]+\boldsymbol{e}_2\left[\frac{i}{\omega}\iint_{-\infty}^{\infty}\phi^{*}\frac{\partial\phi}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]\\&=\boldsymbol{P}_x+\boldsymbol{P}_y\end{aligned} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{P}_{\parallel}=\left[\frac{i}{\omega}\iint_{-\infty}^{\infty}\phi^{*}\frac{\partial\phi}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{P}_z \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 分别表示 x、y、z 方向上的单位矢量。

以下将证明，对于在真空中稳态传输的任意单色标量光束来说，在忽略了瞬逝波的条件下，其 $\boldsymbol{P}_x$、$\boldsymbol{P}_y$、$\boldsymbol{P}_{\perp}$ 都是与截面位置无关的守恒量。为了分析方便，这里首先假定 ϕ 已经满足归一化条件，即

收稿日期：1995 年 3 月 2 日；收到修改稿日期：1995 年 5 月 12 日

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \phi^* \phi \, dx \, dy = 1 \tag{5}$$

把光束截面上的光场分布 $\phi(x、y)$ 对其空间频谱函数作傅里叶展开，可得

$$\phi(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(f_x, f_y) \exp[i2\pi(f_x x + f_y y)] \, df_x df_y = F^{-1}[\psi(f_x, f_y)] \tag{6}$$

而其中的 $\psi(f_x, f_y)$ 即为 $\phi(x、y)$ 的傅里叶变换式，即

$$\psi(f_x, f_y) = F[\phi(x, y)] = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) \exp[-i2\pi(f_x x + f_y y)] \, dx \, dy \tag{7}$$

在傅里叶分析中，存在一个推广的帕塞伐恒等式，即

$$\iint_{-\infty}^{\infty} g^*(x, y) h(x, y) \, dx \, dy = \iint_{-\infty}^{\infty} G^*(f_x, f_y) H(f_x, f_y) \, df_x df_y \tag{8}$$

其中

$$G(f_x, f_y) = F[g(x, y)], \qquad H(f_x, f_y) = F[h(x, y)] \tag{9}$$

用该恒等式及微分运算的傅里叶变换性质，并令 $g(x, y) = \phi(x, y)$，$h(x, y) = \partial \phi(x, y) / \partial x$，则可得到

$$P_x = \frac{i}{\omega} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \, dy$$

$$= \frac{-2\pi}{\omega} \iint_{-\infty}^{\infty} f_x |\psi(f_x, f_y)|^2 df_x df_y \tag{10}$$

而由傅里叶光学可知[4~6]，在忽略了瞬逝波的情况下，$|\psi(f_x, f_y)|^2$ 是一个与轴向坐标 z 无关的不变量，由此可以得出 $\boldsymbol{P}_x$ 是一个光束截面位置无关的守恒量。同理可证，$\boldsymbol{P}_y$ 也是一个与截面位置无关的守恒量。由(3)式得 $\boldsymbol{P}_\perp = \boldsymbol{P}_x + \boldsymbol{P}_y$，由此可知，$\boldsymbol{P}_\perp$ 也是一个与光束截面位置无关的守恒量。

在上述的推导过程中，曾作了一个忽略掉瞬逝波的近似，而这对于上述的结论是不会有多大的影响的，因为在标量场理论适用的范围内，实际光束的瞬逝波成份是微乎其微的[7]，它们对动量的影响可以忽略不计，因而以上得到的关于径向动量的守恒特性是标量场理论下的一个较为精确的结果。

2　光束截面动量的轴向分量是守恒量

由(4)式所确定的 $\boldsymbol{P}_\parallel$，它表示了光束截面动量的轴向分量，它还可进一步表示为

$$P_\parallel = \frac{1}{c} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right) dx \, dy + \frac{i}{\omega} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_0 \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right) dx \, dy \tag{11}$$

可以证明

$$\frac{i}{\omega} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_0 \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right) dx \, dy = \frac{i}{2\omega} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 dx \, dy = 0 \tag{12}$$

因而 $\boldsymbol{P}_\parallel$ 可表示为

$$P_\parallel = \frac{1}{c} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right) dx \, dy \tag{13}$$

在标量场理论中，单色复振幅分布函数 ϕ 满足亥姆霍兹波动方程

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \tag{14}$$

把(2)式代入(14)式，则可得到[1]

$$\phi_0^2 = \phi_0^2|\nabla L|^2 + \frac{1}{k^2}|\nabla\phi_0|^2 - \frac{1}{2k^2}\nabla^2\phi_0^2 \tag{15}$$

$$\nabla^2 L = -\frac{2\nabla L\cdot\nabla\phi_0}{\phi_0} \tag{16}$$

把(13)式对 z 求偏导数，并利用(16)式，再使用分部积分和远场边界条件，经运算化简可得

$$P_{\|} = \frac{1}{c}\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_0^2\frac{\partial L}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{const} \tag{17}$$

(17)式说明：光束截面动量的轴向分量也是一个与轴向坐标 z 无关的守恒量。

以下将给出傍轴近似条件下，$P_{\|}$ 与光束截面能量的径向分量 $E_{\perp}$[1,6,7] 之间所存在的一个简单的关系。在傍轴近似的条件下，$\partial L/\partial z$ 的值非常接近于 1[1]，即 $(\partial L/\partial z) = 1 - \varepsilon$，于是

$$(\partial L/\partial z)^2 = 1 - 2\varepsilon \tag{18}$$

其中 ε 为远小于 1 的小量。由此得到

$$\partial L/\partial z = (1/2)\left[1 + (\partial L/\partial z)^2\right] \tag{19}$$

将(19)式代入(13)式，可以得到

$$P_{\|} = \frac{1}{2c}\left[1 + \iint_{-\infty}^{\infty}\phi_0^2\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right] \tag{20}$$

而由文献[1、6，7]可知，在傍轴近似条件下，有

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_0^2\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + E_{\perp} = 1 \tag{21}$$

由此可以得到以下的一个简单关系

$$P_{\|} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{2}E_{\perp}\right) \tag{22}$$

这就是傍轴近似条件下 $P_{\|}$ 与 $E_{\perp}$ 之间的关系。当然，在傍轴近似的条件下，光束截面动量的轴向分量 $\mathbf{P}_{\|}$ 也仍然是一个与截面位置无关的守恒量。

需要指出的是，光流体模型所定义的动量密度[1]与传统电动力学教科书中所说的动量密度是有区别的。可以证明，在标量场近似的情况下，即取电矢量的三个振动方向都具有相同的准程函 L 时，则通过使用麦克斯韦方程组，可以得到后者的值恒为实数，且就与前者的实部相同。而由于光流体模型所定义的动量密度的虚部对整个截面的积分为 0，所以这两种定义能够给出相同的总动量 P。但是，另一方面，光流体模型理论还赋予动量密度的虚部以明确的物理意义，它表示光束的内禀动量，是光束的内禀性质之一，它与光束的内禀能量以及内禀角动量之间都有直接的关系。

3 光束的动量衍射发散度

文献[1]给出了光束动量衍射发散度的表达式为

$$\Gamma_m = \lim_{z\to\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 \sin\gamma \, dx\, dy \tag{23}$$

其中的 γ 表示远场截面上波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 z 轴的夹角。对于傍轴传输的光束来说，可以证明在远场区，其波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 ∇L 的方向相同，而由于 $|\nabla L| = 1$，因而能够得到

$$\sin\gamma = \sqrt{(\partial L/\partial x)^2 + (\partial L/\partial y)^2} \tag{24}$$

而对于远场傍轴光束来说，光场的波面为球面，其曲率半径等于从焦面到截面的距离 z[8]。所以远场截面上的准程函 L 可表示为（这也可从厄米-高斯光束及其线性和的表达式中看出）

$$L = z + (x^2 + y^2)/2z + C = l + C \tag{25}$$

其中 C 为常数。由(24)～(25)式可得

$$\sin\gamma = \sqrt{(x/z)^2 + (y/z)^2} \tag{26}$$

另外，由夫朗和费远场衍射公式，可得远场截面上的光场分布函数为

$$\phi(x, y) = \frac{\exp(ikl)}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U_1(x_1, y_1) \exp\left[-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda z}x_1 + \frac{y}{\lambda z}y_1\right)\right] dx_1 dy_1 \tag{27}$$

其中的 l 即可由(25)式得到，$U_1(x, y)$ 为焦面上的光场分布函数。把(27)式与傅里叶变换关系(7)式进行比较，则可得到远场上

$$\phi_0^2 = (1/\lambda^2 z^2)\,|\psi_1(x/\lambda z, y/\lambda z)|^2 \tag{28}$$

其中 ψ_1 为 $U_1(x_1, y_1)$ 的空间频谱函数。把(2)式与(28)式代入(23)式，得到

$$\Gamma_m = \lambda \iint_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(t_x, t_y)|^2 \sqrt{t_x^2 + t_y^2}\, dt_x dt_y \tag{29}$$

其中 $t_x = x/\lambda z$、$t_y = y/\lambda z$。显然，从(29)式。只需使用简单的微积分知识，并考虑到 $|\psi(f_x, f_y)|^2$ 是一个与截面位置无关的不变量，就可得到

$$\Gamma_m = \lambda \iint_{-\infty}^{\infty} |\psi(f_x, f_y)|^2 \sqrt{f_x^2 + f_y^2}\, df_x df_y \tag{30}$$

至此，作者推出了 Γ_m 的具体表达式。由于 $|\psi(f_x, f_y)|^2$ 是一个与截面位置无关的守恒量，所以从(30)式可以看出，尽管动量衍射发散度是由远场截面来定义的，但它仍然可以从任何一个截面的光场分布函数中得到。而这一特性也正是作者所希望的。

值得一提的是，当 $\boldsymbol{P}_x = 0$、$\boldsymbol{P}_y = 0$、$\boldsymbol{P}_\perp = 0$ 时，一般来说 Γ_m 并不等于 0，因为它的被积函数是非负实数。它只有在无限大匀幅平面波的情况下，才会为 0，而在任何其它的情况下，它都大于 0。

参 考 文 献

[1] 邓锡铭， 有限束宽光动力学．杭州，杭州大学出版社，1993：3

[2] 邓锡铭，盛国平， 电磁场的内禀角动量．中国激光，1990，17(7)：394

[3] Deng Ximing, Intrinsic angular momentum of the electromagnetic field. *Laser and Particle Beams*, 1992, **10**(1)：117

[4] 黄婉云， 傅里叶光学教程．北京，北京师范大学出版社，1985年5月

[5] J. W. 顾德门， 傅里叶光学导论. 北京. 科学出版社，1979 年 4 月
[6] 邓锡铭，陈泽尊， 傍轴光束截面的内能是一个不变量. 光学学报，1983，3(5)：385～390
[7] 曹清，郭弘，邓锡铭， 光束截面的能量守恒及能量衍射发散度. 光学学报，1996，16(4)：
[8] 邓锡铭，丁丽明，叶陈春， ABCD 定理的推广. 中国激光，1990，17(5)：257～260

Conservation of Beam Cross-Section Momentum and Momentum Diffraction Divergence

Cao Qing　　Guo Hong　　Deng Ximing
(*Shanghai Institute of Optics anf Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)
(Received 2 March 1995; revised 12 May 1995)

Abstract In this paper, it is proved that the beam cross-section momentum and its any component of monochromatic field in vacuum are all invariances and independent of the position of the cross-section, provided that the evanescent waves of the plane-wave spectrum of the beam are ignored. The expression of the beam momentum diffraction divergence is derived.

Key words HMO, beam cross-section momentum, momentum diffraction divergence.

第六届全国光学测试学术交流会在昆明召开

由中国光学学会光学测试专业委员会主办、昆明物理研究所和云南省光学学会承办的第六届全国光学测试学术交流会于 1995 年 11 月 15 日至 19 日在云南省昆明市召开。共有一百多名专家、学者参加会议，他们分别来自上海、江苏、北京、四川、浙江、湖北、广东、吉林、天津、云南、江西、陕西、河北、辽宁、山东等十五个省、市的四十多个科研单位，所属部门包括中国科学院、中国计量科学研究院、机电部、兵器部、建设部及军队系统下属的研究所、高等院校以及从事光学测试工作的科研机构等。

开幕式由王德安研究员主持，由陈进榜教授代表主办单位讲话。经过简短的开幕式后接着进行大会专题报告。

在全体大会上，多年来一直从事光学测试工作的一些教授、专家作了内容丰富的专题报告，受到了与会代表的热烈欢迎。这些报告包括陈进榜教授的"'九五'国防光学计量测试展望"；苏大图教授的"对测量不确定度的几点认识与实践"；王德安研究员的"热成像测试技术及其现状和发展趋势"；李在清研究员的"光辐射计量学的发展"以及韩昌元研究员的"俄罗斯的空间光学研究情况"。

大会后分三个会场进行学术交流，宣讲交流了论文 120 多篇。这些论文充分反映了"八五"向"九五"过渡时期我国在光学测试领域内的新动向和最新科研成果，尤其是，突出地反映了新原理、新技术、新方法在光学测试领域中的广泛应用。

会议期间还举行了光学测试专业委员会第二届委员会议，委员会听取并讨论了陈进榜主任委员关于本届学术会议筹备情况及财务收支的报告，与会委员对各项工作表示满意。会上通报了五名已退休老委员各自的推荐人选并又增补了六名新委员。会议讨论并决定第七届全国光学测试学术交流会于 1997 年秋在西安举行，由国防科工委光学计量一级站承办。会议还选举了第三届光学测试专业委员会的领导班子，陈进榜教授继续担任主任委员，五名副主任委员分别为苏大图、韩昌元、李在清、徐德衍和李景德。

（曹　雁）