

饱和效应对激光场强度相关时间和有效本征值的影响

汪 瑾 朱士群

(苏州大学物理系, 苏州 215006)

摘 要 用全饱和激光模型对既含有加性又含有倍增噪声的激光场进行理论分析, 求出了强度相关时间 T_c 的数值解和有效本征值 λ_{eff} 的解析解。与实验测量相比较表明, 全饱和激光模型与实验吻合得最好, 而三次激光模型的偏差较大。当用全饱和激光模型的理论值同时拟合 T_c 和 λ_{eff} 时, 可以确定该激光系统的空腔衰减常数 K , 从而为测量 K 提供了理论依据。

关键词 加性噪声, 倍增噪声, 饱和效应, 空腔衰减常数。

自八十年代以来, 人们对既含有加性又含有倍增白噪声的单模激光系统进行了广泛的研究^[1~3, 10~12]。理论分析和实验测量表明, 为了正确描述激光场的统计性质, 不仅要把泵浦噪声包括在传统的激光理论模型之中, 而且要考虑饱和效应和空腔衰减常数对激光场的影响。在以往的激光理论模型中仅包含三次非线性项^[1~7, 10~12], 而作者则用全饱和激光模型对既含有加性又含有倍增白噪声的激光场中的饱和效应和空腔衰减常数进行了研究^[11]。

本文首先把和激光场相对应的福克-普朗克方程转化为径向薛定谔方程, 通过计算机模拟其波函数随激光场振幅的变化。其次利用格林函数求出强度相关时间和有效本征值的数值解, 同时还求出有效本征值的解析解, 并与实验测量^[6]进行了比较。最后通过全饱和激光模型和三次激光模型比较, 讨论了全饱和激光模型中空腔衰减常数的作用和影响。

1 理论分析

三次激光模型所代表的激光场的运动方程可用非线性朗之万方程表示为:

$$dE/dt = \alpha_0 E - A|E|^2 E + p(t)E + q(t) \quad (1)$$

式中参量 α_0 和 A 分别为增益和自饱和系数, 随机变量 $q(t)$ 和 $p(t)$ 表示量子噪声和泵浦噪声, 随机噪声的统计性质可由它们的一次矩和二次矩表示为:

$$\begin{aligned} \langle q(t) \rangle = \langle q^*(t) \rangle = \langle p(t) \rangle = \langle p^*(t) \rangle = 0, \\ \langle q^*(t)q(t') \rangle = 2P\delta(t-t'), \quad \langle p^*(t)p(t') \rangle = 2P'\delta(t-t') \end{aligned} \quad (2)$$

式中 P 和 P' 分别为量子噪声和泵浦噪声的强度。全饱和激光模型的运动方程则遵循^[12]:

$$dE/dt = -KE + F_1 E / (1 + A|E|^2/F_1) + p(t)E + q(t) \quad (3)$$

式中 K 为激光场的空腔衰减常数, $F_1 = a_0 + K$ 为增益参数, A , $q(t)$ 和 $p(t)$ 与三次激光模型中的相同。显然, 将(3)式作二项式展开且保留到 A 的一次项就能得到(1)式。与朗之万方程(1)和(3)相对应的福克-普朗克方程在极坐标系中的表达式为^[9]:

$$\begin{aligned} \partial Q(r, \varphi, t) / \partial t = & -\partial [F(r)Q(r, \varphi, t)] / \partial r + \mathcal{L}[D_r(r)Q(r, \varphi, t)] / \partial r^2 \\ & + \mathcal{L}[D_\varphi(r)Q(r, \varphi, t)] / \partial \varphi^2 \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $Q(r, \varphi, t)$ 为含时几率密度, r 和 φ 为振幅和位相, 满足 $E = r \exp(i\varphi)$, 对应于三次激光模型, 有^[3~6, 11, 12]

$$F_c(r) = a_0 r - Ar^3 + P/2r + P'r/2 \quad (5)$$

对应于全饱和激光模型, 有^[4, 7, 8]

$$F_c(r) = -Kr + F_1 r / (1 + Ar^2/F_1) + P/2r + P'r/2 \quad (6)$$

$$\text{并且, } D_{rc}(r) = D_{rs}(r) = (P + P'r^2)/2, \quad D_{\varphi c}(r) = D_{\varphi s}(r) = (P + P'r^2)/2r^2 \quad (7)$$

经过适当的数学变换, 可得含 r 的激光波函数的运动方程^[6]:

$$[(P + P'r^2)/2] d^2 \psi_{nm} / dr^2 + [\lambda_{nm} - V_n(r)] \psi_{nm} = 0 \quad (8)$$

式中 λ_{nm} 为本征值, $V_n(r)$ 为势函数。对应于三次激光模型的势函数为:

$$\begin{aligned} V_{nc}(r) = & r^2(a_0 - P'/2 - Ar^2)^2 / 2(P + P'r^2) + (a_0 - 2Ar^2) \\ & - P'r^2(a_0 + P'/2 - Ar^2) / 2(P + P'r^2) - P'/4(P + P'r^2) \\ & + P'm^2/2 + P(m^2 - 1/4) / 2r^2 \end{aligned} \quad (9)$$

对应于全饱和激光模型的势函数为:

$$\begin{aligned} V_{nc}(r) = & -(K + P'/2) / 2 + F_1^2(F_1 - Ar^2) / 2(F_1 + Ar^2)^2 + P' / (P + P'r^2) \\ & + [F_1^2 r / (F_1 + Ar^2) + P/2r - (K + P'/2)r]^2 / 2(P + P'r^2) \\ & + P'm^2/2 + P(m^2 - 1/2) / 2r^2 \end{aligned} \quad (10)$$

方程(8)具有径向薛定谔方程的形式^[6]。双时间的强度相关函数可表示为:

$$\langle I(t)I(t+\tau) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n0} \exp(-\lambda_{n0}\tau) = \mu(\tau) + \langle I \rangle^2 \quad (11)$$

$$\text{其中 } v_{n0} = \left| \int_0^{\infty} dr r^2 \frac{\psi_{00}(r)\psi_{n0}(r)}{(P + P'r^2)/2} \right|^2 \quad (12)$$

对应于三次激光模型^[6], 有

$$\psi_{00c}(r) = \text{const.} [r(1 + P'r^2/P)^{\beta_c}] \exp(-Ar^2/P') / [(P + P'r^2)/2]^{1/2} \quad (13)$$

式中 $\beta_c = a_0/P' + AP/(P')^2 - 1$, 而对应于全饱和激光模型, 有

$$\psi_{00s}(r) = \text{const.} \left[\frac{r(1 + P'r^2/P)^{\beta-\alpha}}{(1 + Ar^2/F_1)^{\beta}} \right] / [(P + P'r^2)/2]^{1/2} \quad (14)$$

式中 $\alpha = K/P' + 1$, $\beta = F_1^2(F_1 P' - PA)$ 。这里在实验上可探测的物理量有两个, 一个是强度相关时间 T_c , 另外一个是有有效本征值 λ_{eff} :

$$T_c = \int_0^{\infty} d\tau \mu(\tau) / \mu(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (v_{n0} / \lambda_{n0}) / \sum_{n=1}^{\infty} v_{n0} \quad (15)$$

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} v_{n0} \lambda_{20}}{\sum_{n=1}^{\infty} v_{n0}} \quad (16)$$

显然, 方程(15)、(16)的值只能通过计算机对方程(8)进行数值积分来求得。如果将朗之万方程(1)和(3)作一简单变换, 并考虑到方程(2)中各种噪声的性质, 可以求出有效本征值的精确表达式。对于三次激光模型, 有

$$\lambda_{\text{effc}} = \{2\langle I \rangle_c [PA + a_0 P' + (P')^2] + 2P'P\} / [(a_0 + P')\langle I \rangle_c + P - A\langle I \rangle_c^2] \quad (17)$$

对应于全饱和激光模型, 有^[10]

$$\lambda_{\text{effb}} = \frac{2\langle I \rangle_c [PA(K - 2P') + 2PP'A + F_1(P')^2 + P'F_1(F_1 - K)] + 2PP'F_1}{F_1P + [2PA + F_1P' + F_1(F_1 - K)]\langle I \rangle_c - A(K - 2P')\langle I \rangle_c^2} \quad (18)$$

2 比 较

为了检验理论的正确程度, 可以将上述结果与 Phillips、Young 和 Singh^[6] 的实验测量相比较, 其中参量选取为 $A = 1$, $P = 2$, $P' = 2Q$, $K = 200$, 并且 $a_0 = F_1 - K$ 。

激光强度相关时间 T_c 随不同倍增噪声变化的情况, 如图 1 所示。由图 1 可见, T_c 在阈值附近时出现一个峰值, 且峰值的高度随倍增噪声的增强而增加, 峰值的位置随倍增噪声的增强而向 $\langle I \rangle$ 减小的方向移动。当激光场在低于或偏离阈值稍大的情况下工作时, 强度相关时间随倍增噪声变化的情况不明显。当 $P' = 0$ 时, 两模型之间的区别很小, 当 $P' = 1.78$ 和 3.28 时, 全饱和激光模型与实验结果吻合较好^[6], 而三次激光模型则出现较大偏差。有效本征值 λ_{eff} 随不同倍增噪声变化的情况画在图 2 中。从下到上, $P' = 0, 1.78, 3.28$ 。显然全饱和模型比三次模型能更好地拟合实验数据^[6]。全饱和激光模型强度相关时间和有效本征值随空腔衰减常数 K 变化的情况如图 3(a) 和 3(b) 所示, 其中 $P' = 1.78$, $K = 30$ 和 300。在图 3(a) 中, T_c 随 K 的增大而减小; 在图 3(b) 中, λ_{eff} 随 K 的增大而增大。从图 3 可见, 当 K 变大时, 全饱和激光模型逐渐趋近三次激光模型。图 3 同时还揭示了一个非常重要的事实, 当空腔衰减常数较小时, 全饱和激光模型的 T_c 曲线在三次激光模型的上方, λ_{eff} 曲线在三次激光模型的下方; 然而, 当 K 增大到某个值时, 全饱和激光模型的 T_c 曲线在三次激光模型的下方, λ_{eff} 曲线在三次激光模型的上方。这就意味着, 适当调节 K 的大小, 使方程(15)和(16) [或(18)] 得到的

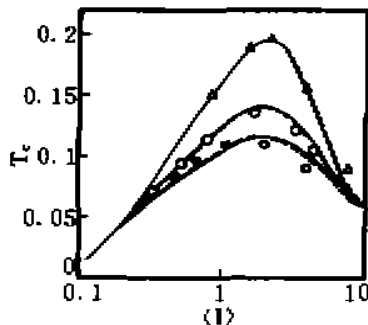


Fig. 1 Intensity correlation time T_c as a function of the mean light intensity $\langle I \rangle$ for different values of pump noise P' , $P' = 0, 1.78$, and 3.28 (from top to bottom), Δ, \circ, \square : experimental data; — third order theory from Eq. (15); $\cdots\cdots$ full saturation theory from Eq. (15) with $K = 200$

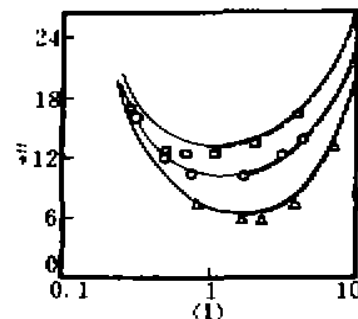


Fig. 2 Effective eigenvalue λ_{eff} as a function of the mean light intensity $\langle I \rangle$ for different values of pump noise P' , $P' = 0, 1.78$, and 3.28 (from bottom to top), Δ, \circ, \square : experimental data; — third order theory from Eq. (17); $\cdots\cdots$ full saturation theory from Eq. (18) with $K = 200$

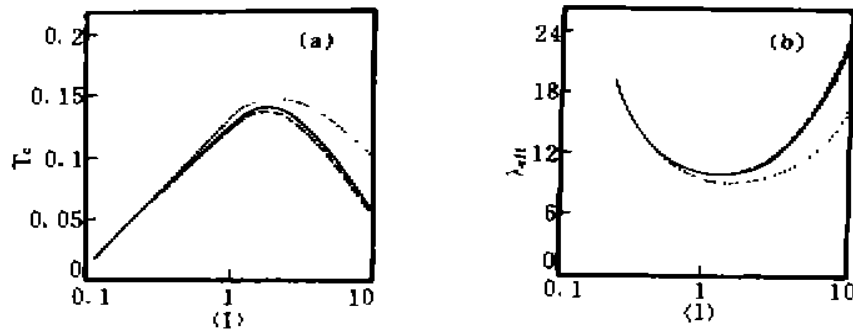


Fig. 3 (a) Intensity correlation time T_c as a function of the mean light intensity $\langle I \rangle$. From top to bottom: full saturation theory from Eq. (15) with $K = 30$; —— third order theory from Eq. (15); full saturation theory from Eq. (15) with $K = 300$, (b) Effective eigenvalue λ_{eff} as a function of the mean light intensity $\langle I \rangle$. From bottom to top: full saturation theory from Eq. (18) with $K = 30$; —— third order theory from Eq. (17); full saturation theory from Eq. (18) with $K = 300$

理论值能同时将 T_c 和 λ_{eff} 的实验数据拟合得很好^[6]。这说明，通过最佳拟合实验数据，可以确定该激光系统的空腔衰减常数 K 的值。这样， K 就不再是一个自由参量，不能任意调节。

势函数随场振幅 r 和不同倍增噪声变化的情况画在图 4 中，全饱和模型的饱和效应即清楚地呈现于薛定谔方程的势函数中——势函数随激光场振幅的增加而趋近于某个定值，且该定值随泵浦白噪声强度的增长而逐渐减小。研究表明，饱和效应还与激光场的空腔衰减常数有关，而泵浦参数对势函数影响不大。至于三次激光模型，势函数随激光场振幅的四次方迅速增长，不出现饱和现象。这是两个模型间最重要的区别，也是影响薛定谔方程中波函数和本征值的本质因素。因强度相关时间和有效本征值是实验上可测的，而且在理论分析与波函数和本征值直接相关，所以势函数的饱和效应从根本上左右了这两个可探测的参量。

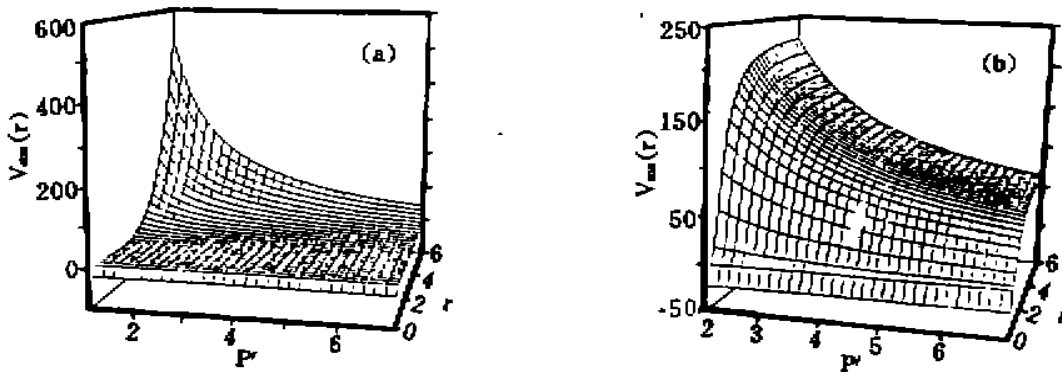


Fig. 4 The potential $V_m(r)$ as a function of the field amplitude r and different values of pump noise P' . (a) Third order theory from Eq. (9); $P' = 1 \sim 7$, $r = 0.01 \sim 6$, $a = 2$. (b) Full saturation theory from Eq. (10) with $P' = 2 \sim 7$, $r = 0.01 \sim 6$, $P_1 = 32$, $K = 30$

结 论 通过以上的理论分析以及不同理论和实验的比较可以看出，当激光工作于阈值附近时，全饱和激光模型和三次激光模型与实验符合都很好，三次激光模型是全饱和激光模型很好的近似；而当激光场在偏离阈值稍大的情况下工作时，三次激光模型偏差较大，而全饱和和激光模型则能较好地描述激光场的行为。由于在全饱和激光模型中，只要适当调节空腔衰减常数 K 的大小，就能同时将强度相关时间 T_c 和有效本征值 λ_{eff} 的实验数据拟合得最好，所以通过测量 T_c 和 λ_{eff} ，就可确定该激光系统的空腔衰减常数 K ，为间接测量 K 提供了新的方法。

致 谢 作者衷心感谢与汪瑶、王磊进行的许多有益的讨论以及提出的很多有价值的建议。

参 考 文 献

- [1] P. Lett, R. Short, L. Mandel, Photon statistics of a dye laser far below threshold. *Phys. Rev. Lett.*, 1984, **52**(5) : 341~343
- [2] S. N. Dixit, P. S. Sahni, Nonlinear stochastic processes driven by colored noise: application to dye-laser statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 1983, **50**(17) : 1273~1276
- [3] R. Roy, A. W. Yu, S. Zhu, Quantum fluctuations, pump noise, and the growth of laser radiation. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **55**(25) : 2794~2797
- [4] S. Zhu, A. W. Yu, R. Roy, Statistical fluctuations in laser transients. *Phys. Rev. (A)*, 1986, **34**(5) : 4333~4347
- [5] R. F. Fox, R. Roy, Steady state analysis of strongly colored multiplicative noise in a dye laser. *Phys. Rev. (A)*, 1987, **35**(4) : 1838~1842
- [6] K. J. Phillips, M. R. Young, S. Singh, Intensity correlation functions of the laser with multiplicative white noise. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(5) : 3239~3249
- [7] M. Aguado, E. Hernandez-García, M. San Miguel, Dye-laser fluctuations; comparison of colored loss-noise and white gain-noise models. *Phys. Rev. (A)*, 1988, **38**(11) : 5670~5677
- [8] L. Cao, D. Wu, X. Luo, Effects of saturation in the transient process of a dye laser. I colored-noise case, *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(9) : 6848~6856
- [9] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation* (Springer-Verlag, Berlin, 1984)
- [10] M. San Miguel, L. Pesquera, M. A. Rodrigues, et al., Effective eigenvalue for the intensity correlations of single-mode and two-mode lasers. *Phys. Rev. (A)*, 1987, **35**(1) : 208~216
- [11] S. Zhu, Effects of multiplicative white and colored noise in dye-laser theory. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **41**(3) : 1689~1694
- [12] S. Zhu, Saturation effects in a laser with multiplicative white noise. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(5) : 3210~3215

Saturation Effects on Intensity Correlation Time and Effective Eigenvalue of a Laser Field

Wang Jin Zhu Shiqun

(Department of Physics, Suzhou University, Suzhou 215006)

(Received 30 December 1994; revised 6 March 1995)

Abstract A laser field that contains both additive and multiplicative noise are analysed based on a full saturation laser model. The numerical solution of intensity correlation time T_c as well as the exact formulas of effective eigenvalue λ_{eff} are calculated. Compared with the experimental measurements, excellent agreement is obtained for the full saturation laser theory, while relatively large errors occurred in the third order laser theory and the measured data. By best fitting the experimental data of both T_c and λ_{eff} with the full saturation laser model, the cavity decay rate K of the laser system can be determined, therefore it provides a theoretical evidence for measuring K .

Key words additive noise, multiplicative noise, saturation effect, cavity decay rate.