

# 同心椭圆度光纤的耦合系数计算

王黎蒙 严润生

(电子工业部上海传输线研究所检测中心, 上海 200437)

**摘 要** 应用耦合模原理, 用 Mathieu 函数表示纤芯、包层为同心椭圆度的光纤中的电磁场, 在适当近似条件下, 求得了基模场中的偶模耦合系数表示式, 并给出了截止条件下的离心率~耦合系数, 半长轴~耦合系数曲线。

**关键词** 椭圆光纤, 耦合系数。

随着以多媒体技术和光缆传输为核心的“信息高速公路”的兴起, 光纤技术在相干光通信, 集成光学, 光传感技术, 光信息处理和光计算机等各领域得到了广泛使用。应用非圆光波导几何形状的不完全对称性所产生的丰富多彩的物理特性和应力结构特征制造光纤器件, 成为近几年来系统、深入研究的一个热点<sup>[1]</sup>。非轴对称结构有多种形式, 如椭圆型, 熊猫型, 领结型, 边坑型, 边隧道型, D 型, 条型以及其它特种设计的形状等。其中椭圆型光纤因生产工艺规程要求简单、可靠, 而被人们所偏爱, 成为利用最广泛的保偏光纤之一<sup>[2]</sup>。在众多的光纤器件中, 有相当一部分要考虑光的耦合效应(如光耦合器, 光纤传感器, 集成光学器件等), 因此讨论光波在椭圆光纤间的耦合问题既有理论意义, 又有实用价值。本文采用耦合模理论, 以同心椭圆度阶跃光纤为对象, 分析讨论其耦合问题, 计算对实际耦合元件有决定作用的耦合系数。

## 1 光纤中的电磁场和截止频率

椭圆光纤中的标量场分布, 有多种方法可以求解, 如微扰法<sup>[3]</sup>, 摄动法, Mathieu 函数法<sup>[4~6]</sup>, 数值解法等, 本文采用 Mathieu 函数方法。同心椭圆光纤的波导结构参数, 如图 1 所示。在正椭圆柱坐标系  $(\zeta, \eta, z)$  中, 可以写出标量亥姆霍茨 (Helmholtz) 方程<sup>[4~6]</sup>:

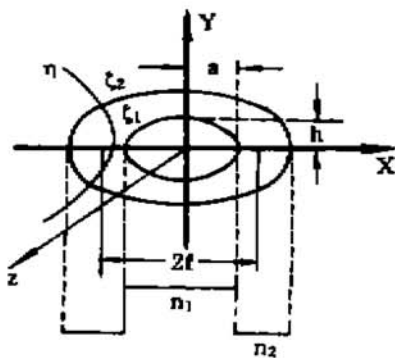


Fig. 1 The ellipsoidal coordinate system

$$\left\{ \frac{4}{f^2 (\operatorname{ch} 2\zeta - \cos 2\eta)} \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 \right\} \psi = 0. \quad (1)$$

式中  $f$  为半焦距,  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ , 波函数  $\psi = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ , 应用分离变量法, 可得二个 Mathieu 方程, 求解得电磁场的纵向分量为:

$$\left. \begin{aligned} E_{z1}(\zeta, \eta, z) \\ H_{z1}(\zeta, \eta, z) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} A_r Ce_r(\zeta, \gamma_1^2) ce_r(\eta, \gamma_1^2) \\ \sum_{r=1}^{\infty} B_r Se_r(\zeta, \gamma_1^2) se_r(\eta, \gamma_1^2) \end{aligned} \right\} \exp [j(\omega t \mp \beta z)] \quad \begin{aligned} (\zeta \leq \zeta_1, \text{偶模}) \\ (\zeta \leq \zeta_1, \text{奇模}) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{z2}(\zeta, \eta, z) \\ H_{z2}(\zeta, \eta, z) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} C_r Fek_r(\zeta, -\gamma_2^2) ce_r(\eta, -\gamma_2^2) \\ \sum_{r=1}^{\infty} D_r Gek_r(\zeta, -\gamma_2^2) se_r(\eta, -\gamma_2^2) \end{aligned} \right\} \exp [j(\omega t \mp \beta z)] \quad \begin{aligned} (\zeta \leq \zeta_1, \text{偶模}) \\ (\zeta \leq \zeta_1, \text{奇模}) \end{aligned} \quad (3)$$

式中:  $\gamma_1^2 = (1/4)(n_1^2 k_0^2 - \beta^2) f^2$ ,  $\gamma_2^2 = (1/4)(\beta^2 - n_2^2 k_0^2) f^2$ ;  $A_r, B_r, C_r, D_r$  为待定系数, 由边界条件决定;  $ce_r(\eta), ce_r(\eta), se_r(\eta), se_r(\eta)$  是第一类 Mathieu 函数,  $Ce_r(\zeta), Se_r(\zeta)$  是第一类修正 Mathieu 函数,  $Fek_r(\zeta), Gek_r(\zeta)$  是第三类修正 Mathieu 函数。引入三个参数:

$$\left. \begin{aligned} U^2 &= f^2 \text{ch}^2 \zeta_1 (n_1^2 k_0^2 - \beta^2) = 4 \text{ch}^2 \zeta_1 \gamma_1^2 \\ W^2 &= f^2 \text{ch}^2 \zeta_1 (\beta^2 - n_2^2 k_0^2) = 4 \text{ch}^2 \zeta_1 \gamma_2^2 \\ V^2 &= U^2 + W^2 = f^2 k_0^2 \text{ch}^2 \zeta_1 (n_1^2 - n_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中  $V$  为归一化工作频率。应用麦克斯韦方程组, 可写出纤芯中的横向分量(略去传播因子  $\exp [j(\omega t \mp \beta z)]$ , 为示区别,  $E_z, H_z$  等写为  $e_z, h_z$ ):

$$e_{\zeta_1}(\zeta, \eta) = -\frac{j\beta}{(n_1^2 k_0^2 - \beta^2)} \frac{1}{f \sqrt{\text{ch}^2 \zeta - \cos^2 \eta}} \left\{ \frac{\omega\mu}{\beta} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} A_r Ce_r ce'_r(\eta) \right] + \left[ \sum_{r=0}^{\infty} A_r Ce'_r(\zeta) ce_r \right] + \left[ \sum_{r=1}^{\infty} B_r Se_r se'_r(\eta) \right] + \left[ \sum_{r=1}^{\infty} B_r Se'_r(\zeta) se_r \right] \right\} \quad (5)$$

$$h_{\zeta_1}(\zeta, \eta) = -\frac{j\beta}{(n_1^2 k_0^2 - \beta^2)} \frac{1}{f \sqrt{\text{ch}^2 \zeta - \cos^2 \eta}} \left\{ \left[ \sum_{r=0}^{\infty} A_r Ce'_r(\zeta) ce_r \right] - \frac{\omega\epsilon}{\beta} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} A_r Ce_r ce'_r(\eta) \right] + \left[ \sum_{r=1}^{\infty} B_r Se_r se'_r(\eta) \right] - \left[ \sum_{r=1}^{\infty} B_r Se'_r(\zeta) se_r \right] \right\} \quad (6)$$

$$e_{\eta_1}(\zeta, \eta) = -\frac{j\beta}{(n_1^2 k_0^2 - \beta^2)} \frac{1}{f \sqrt{\text{ch}^2 \zeta - \cos^2 \eta}} \left\{ -\frac{\omega\mu}{\beta} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} A_r Ce'_r(\zeta) ce_r \right] + \left[ \sum_{r=0}^{\infty} A_r Ce_r ce'_r(\eta) \right] + \left[ \sum_{r=1}^{\infty} B_r Se'_r(\zeta) se_r \right] + \left[ \sum_{r=1}^{\infty} B_r Se_r se'_r(\eta) \right] \right\} \quad (7)$$

$$h_{\eta_1}(\zeta, \eta) = -\frac{j\beta}{(n_1^2 k_0^2 - \beta^2)} \frac{1}{f \sqrt{\text{ch}^2 \zeta - \cos^2 \eta}} \left\{ \left[ \sum_{r=0}^{\infty} A_r Ce_r ce'_r(\eta) \right] + \frac{\omega\epsilon}{\beta} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} A_r Ce'_r(\zeta) ce_r \right] + \left[ \sum_{r=1}^{\infty} B_r Se_r se'_r(\eta) \right] + \left[ \sum_{r=1}^{\infty} B_r Se'_r(\zeta) se_r \right] \right\} \quad (8)$$

式中 Mathieu 函数求导分别对应于括号中求导自变量, 另一不求导的则省去, 如:  $Ce'_r(\zeta) = \partial [Ce_r(\zeta, \gamma_1^2)] / \partial \zeta$  等。同理也可写出包层中的分量, 这里省略了。在光纤中的电磁场完整地表示为:

$$\begin{bmatrix} E(\zeta, \eta, z) \\ H(\zeta, \eta, z) \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} E_{\zeta} \\ H_{\zeta} \end{bmatrix} a_{\zeta} + \begin{bmatrix} E_{\eta} \\ H_{\eta} \end{bmatrix} a_{\eta} \right] + \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} a_z \quad (9)$$

式中  $a_i (i = \zeta, \eta, z)$  是正椭圆柱坐标系中梯度方向上的单位矢量, 方括号  $[\ ]$  内的是电磁场的横向分量。

利用边界条件, 在弱导近似及小椭圆度假设下, 可以导出  $\beta, u, w$  之间的特征方程<sup>[6]</sup>:

$$\left[ \frac{Ce'_z(\zeta_1, \gamma_1^2)}{U^2 Ce_z(\zeta_1, \gamma_1^2)} + \frac{Fek'_z(\zeta_1, -\gamma_2^2)}{W^2 Fek_z(\zeta_1, -\gamma_2^2)} \right] \left[ \frac{Se'_z(\zeta_1, \gamma_1^2)}{U^2 Se_z(\zeta_1, \gamma_1^2)} + \frac{(1-2\Delta)Gek'_z(\zeta_1, -\gamma_2^2)}{W^2 Gek_z(\zeta_1, -\gamma_2^2)} \right] = \left( \frac{x\beta}{k_0 n_1} \right) \left( \frac{V}{UW} \right)^4 \quad (10)$$

当  $x=0$  时, 有:

$$\frac{Ce'_0(\zeta_1, \gamma_1^2)}{U^2 Ce_0(\zeta_1, \gamma_1^2)} + \frac{Fek'_0(\zeta_1, -\gamma_2^2)}{W^2 Fek_0(\zeta_1, -\gamma_2^2)} = 0 \quad (11)$$

由上式及截止条件  $W=0$ , 可得长短轴之比  $a/b$ , 偏心率  $e$ , 截止频率  $V_c$  和椭圆坐标  $\zeta_1$  相互之间的数值表格<sup>[7]</sup>:

Table 1. Values of  $a/b$ ,  $e$ ,  $V_c$  and  $\zeta_1$

$a/b$	1	1.1	1.5	2	2.5	3	4	6	$\infty$
$e$	0	0.4166	0.7454	0.8660	0.9165	0.9428	0.9683	0.9860	1
$V_c$	2.405	2.20	2.04	1.89	1.81	1.76	1.70	1.65	1.571
$\zeta_1$	$\infty$	1.5223	0.8047	0.5493	0.4236	0.3466	0.2554	0.1682	0

为了简单起见, 本文选取(5)、(7)式中一个偶模特解和对应的包层模:

$$\left. \begin{aligned} e_{\zeta_1}(\zeta, \eta) &= -\frac{j\beta}{(n_1^2 k_0^2 - \beta^2)} \frac{1}{f \sqrt{\text{ch}^2 \zeta - \cos^2 \eta}} A_z Ce'_z(\zeta, \gamma_1^2) ce_z(\eta, \gamma_1^2) \\ e_{\eta_1}(\zeta, \eta) &= -\frac{j\beta}{(n_1^2 k_0^2 - \beta^2)} \frac{1}{f \sqrt{\text{ch}^2 \zeta - \cos^2 \eta}} A_z Ce_z(\zeta, \gamma_1^2) ce'_z(\eta, \gamma_1^2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} e_{\zeta_2}(\zeta, \eta) &= -\frac{j\beta}{(\beta^2 - n_2^2 k_0^2)} \frac{1}{f \sqrt{\text{ch}^2 \zeta - \cos^2 \eta}} C_z Fek'_z(\zeta, -\gamma_2^2) ce_z(\eta, -\gamma_2^2) \\ e_{\eta_2}(\zeta, \eta) &= -\frac{j\beta}{(\beta^2 - n_2^2 k_0^2)} \frac{1}{f \sqrt{\text{ch}^2 \zeta - \cos^2 \eta}} C_z Fek_z(\zeta, -\gamma_2^2) ce'_z(\eta, -\gamma_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

用上式进行下面的耦合原理讨论。

## 2 耦合原理

由于包层与纤芯同心, 并且包层也是椭圆的, 所以光纤的长短轴是不难判断的。假设两根  $z$  轴方向平行并列放置光纤, 它们的长、短轴也相互平行; 通常传输波的振幅和相位均是  $z$  的函数, 在振幅随  $z$  轴作缓慢变化条件下,  $2 \times 2$  端耦合的耦合波方程可以写为<sup>[8-9]</sup>:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} C_r^{(+)} \\ C_r^{(-)} \end{pmatrix} = \sum_r \begin{pmatrix} K_{rr}^{(+,+)} \exp [j(\beta_x - \beta_y)z] & K_{rr}^{(+,-)} \exp [j(\beta_x + \beta_y)z] \\ K_{rr}^{(-,+)} \exp [-j(\beta_x + \beta_y)z] & K_{rr}^{(-,-)} \exp [-j(\beta_x - \beta_y)z] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r^{(+)} \\ C_r^{(-)} \end{pmatrix} \quad (14)$$

式中  $C_r^{(+)}$ ,  $C_r^{(-)}$  是正向和反向传输波的振幅,  $\beta_i (i = x, y)$  是传播常数。

对于弱导光波导, 理想椭圆波导模式的耦合系在椭圆柱坐标中可表示为:

$$K_{rs} = \left( \frac{\omega \epsilon_0}{4jP} \right) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (n^2 - n_i^2) e_{rs}^{(+)} \cdot e_{rs}^{(+)} f^2(\text{ch}^2 \zeta - \cos^2 \eta) d\zeta d\eta \quad (15)$$

$s = e, o$  对应于偶模或奇模,  $P$  是波导中传播的功率。

在正交曲线坐标系中, 度量张量  $(g_{ij})$  是一个对角矩阵, 对正椭圆柱坐标, 矩阵元素为:

$$\begin{cases} g_{11} = g_{22} = f^2(\text{ch}^2 \zeta - \cos^2 \eta) \\ g_{33} = 1 \end{cases} \quad (16)$$

所以两个波导场的标积是：

$$\begin{aligned} e_1^i \cdot e_2^i &= (e_{\zeta_1}^i a_{\zeta_1}^i + e_{\eta_1}^i a_{\eta_1}^i) \cdot (e_{\zeta_2}^i a_{\zeta_2}^i + e_{\eta_2}^i a_{\eta_2}^i) \\ &= f^2 (\text{ch}^2 \zeta_1 - \cos^2 \eta_1) (e_{\zeta_1}^i e_{\zeta_2}^i + e_{\eta_1}^i e_{\eta_2}^i) \end{aligned} \quad (17)$$

因为光纤横截面是椭圆型，波导结构的不完全对称性必然会引起偏振效应，即  $\Delta\beta = \beta_x - \beta_y \neq 0$ ，并且传输的模式除了通常的导模，辐射模等之外，可能会引入新类型的模式，准确地分析这些问题对相互耦合之间的影响是十分复杂的，需要作一些近似处理，以突出主要因素。本文只考虑基模间的耦合情况，并以偶模与偶模相互作用为例来讨论。如图 2 所示，两根光纤组成的耦合系统，在同一共同坐标系中包层相互接触，坐标系统原点位于第二个波导中心，将(17)代入(15)式得

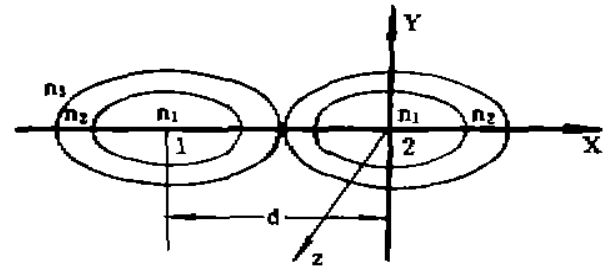


Fig. 2 The Profile of two-fiber coupling

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \frac{\omega \epsilon_0 f^4}{4jP} \left[ \int_0^{\zeta_1} \int_0^{2\pi} \{ (n_3^2 - n_1^2) (e_{\zeta_1}^i e_{\zeta_2}^i + e_{\eta_1}^i e_{\eta_2}^i) \sqrt{(\text{ch}^2 \zeta_1 - \cos^2 \eta_1) (\text{ch}^2 \zeta_2 - \cos^2 \eta_2)} \right. \\ &\quad \times (\text{ch}^2 \zeta_2 - \cos^2 \eta_2) \} d\zeta_2 d\eta_2 + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_0^{2\pi} \{ (n_3^2 - n_2^2) (e_{\zeta_2}^i e_{\zeta_2}^i + e_{\eta_1}^i e_{\eta_2}^i) \\ &\quad \times \sqrt{(\text{ch}^2 \zeta_1 - \cos^2 \eta_1) (\text{ch}^2 \zeta_2 - \cos^2 \eta_2)} (\text{ch}^2 \zeta_2 - \cos^2 \eta_2) \} d\zeta_2 d\eta_2 \left. \right] \end{aligned} \quad (18)$$

式中， $e_{\zeta_1}^i, e_{\eta_1}^i, e_{\zeta_2}^i, e_{\eta_2}^i$  为图中一号光纤中的纤芯、包层场， $e_{\zeta_1}^i, e_{\eta_1}^i, e_{\zeta_2}^i, e_{\eta_2}^i$  为二号光纤中的场(纤芯场用足标  $\zeta_1, \eta_1$  表示，包层场用  $\zeta_2, \eta_2$  表示)，把(12)，(13)式代入(18)式可得：

$$K_{xy} = \frac{j\omega \epsilon_0 f^2 \beta^2}{4P} \left\{ \frac{(n_3^2 - n_1^2) A_r^i A_c^i}{(n_1^2 k_0^2 - \beta^2)^2} (I_1 + I_2) + \frac{(n_3^2 - n_2^2) C_r^i C_c^i}{(\beta^2 - n_2^2 k_0^2)^2} (I_3 + I_4) \right\} \quad (19)$$

式中  $I_1, I_2$  是纤芯的作用， $I_3, I_4$  是包层的影响。其中：

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\zeta_1} \int_0^{2\pi} C e_{\zeta_1}^i(\zeta_1) c e_{\zeta_2}^i(\eta_1) C e_{\zeta_2}^i(\zeta_2) c e_{\zeta_2}^i(\eta_2) (\text{ch}^2 \zeta_2 - \cos^2 \eta_2) d\zeta_2 d\eta_2 \\ I_2 &= \int_0^{\zeta_1} \int_0^{2\pi} C e_{\zeta_2}^i(\zeta_1) c e_{\zeta_2}^i(\eta_1) C e_{\zeta_2}^i(\zeta_2) c e_{\zeta_2}^i(\eta_2) (\text{ch}^2 \zeta_2 - \cos^2 \eta_2) d\zeta_2 d\eta_2 \\ I_3 &= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_0^{2\pi} F e k_r^i(\zeta_1) c e_{\zeta_2}^i(\eta_1) F e k_r^i(\zeta_2) c e_{\zeta_2}^i(\eta_2) (\text{ch}^2 \zeta_2 - \cos^2 \eta_2) d\zeta_2 d\eta_2 \\ I_4 &= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_0^{2\pi} F e k_r^i(\zeta_1) c e_{\zeta_2}^i(\eta_1) F e k_r^i(\zeta_2) c e_{\zeta_2}^i(\eta_2) (\text{ch}^2 \zeta_2 - \cos^2 \eta_2) d\zeta_2 d\eta_2 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

以上积分中的 Mathieu 函数的无穷级数的周期性解可以表示为<sup>[5]</sup>：

$$\left. \begin{aligned}
ce_{2x}(z, q) &= \sum_{s=0}^{\infty} A_0^{(2s)} \cos(2sz), & x = 0, 1, 2, \dots \\
Ce_{2x}(z, q) &= ce_{2x}(\pi/2, q)/A_0^{(2x)} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s A_0^{(2s)} J_{2s}(2\sqrt{q} \operatorname{ch} z), & x = 0, 1, 2, \dots \\
Fek_{2x}(z, q) &= ce_{2x}(\pi/2, q)/\pi A_0^{(2x)} \sum_{s=0}^{\infty} A_0^{(2s)} K_{2s}(2\sqrt{q} \operatorname{ch} z), & x = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \right\} \quad (21)$$

上式  $J_{2s}$  是第一类 Bessel 函数,  $K_{2s}$  是第二类修正 Bessel 函数;  $A_0^{(2s)}$  是傅里叶展开式系数, 它的归一化条件是:

$$2[A_0^{(2x)}]^2 + \sum_{s=1}^{\infty} [A_0^{(2s)}]^2 = 1 \quad (22)$$

零阶 Mathieu 函数的前几个展开系数可表示为:

$$\left. \begin{aligned}
A_0^{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & A_2^{(0)} &= -\frac{1}{2} \nu_1^2 + \frac{7}{128} \nu_1^4 + \dots \\
A_4^{(0)} &= \frac{1}{32} \nu_1^4 - \frac{320}{73728} \nu_1^8 + \dots, & A_6^{(0)} &= -\frac{1}{1152} \nu_1^6 + \dots
\end{aligned} \right\} \quad (23)$$

### 3 ${}^eK_{00}$ 的近似计算

精确地求解  $I_1 \sim I_4$  是较困难的, 本文以最简单的情况为例, 用近似方法来逼近, 在一定的简化条件下, 计算  ${}^eK_{00}$  值。对于单包层椭圆光纤, 如果是匹配包层型 ( $n_2 = n_3$ ), 由 (19) 可知, 只要计算  $I_1, I_2$ 。椭圆的偏心率  $e = 1/\operatorname{ch} \zeta_1 = f/a$ , 当  $e \rightarrow 1$  ( $\zeta_1 \rightarrow 0$ ) 时,  $f \rightarrow a$ , 此时椭圆退化为长度  $2f$  的线段; 如果  $f \rightarrow 0$ , 两焦点合为一个中心, 此时  $e \rightarrow 0$  ( $\zeta_1 \rightarrow \infty$ ), 即椭圆趋近于一个圆, 坐标  $\zeta$  退化成圆柱坐标  $r$ ,  $\eta$  退化成方向角  $\phi$ 。因  $\nu_1^2 = (1/4)(n_1^2 k_0^2 - \beta^2)f^2$ , 所以当焦距  $f$  很短时 (轻微椭圆), 有下列关系:

$$\lim_{\nu_1 \rightarrow 0} ce_x(\eta, \nu_1^2) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & x = 0 \\ A_2^{(x)} \cos(x\eta) = \cos(x\theta) & x \neq 0 \end{cases} \quad (24)$$

显然, 在 (24) 式条件下, 对于基偶模 ( $x = y = 0$ ),  $I_1, I_2$  简化为:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\zeta_1} \int_0^{2\pi} Ce_0(\zeta_1) Ce_0(\zeta_2) (\operatorname{ch}^2 \zeta_2 - \cos^2 \eta_2) d\zeta_2 d\eta_2 \\ I_2 = 0 \end{cases} \quad (25)$$

利用 (4) 式, (19) 式可表示为:

$${}^eK_{00} = \frac{jce_0 V (W^2 n_1^2 + U^2 n_2^2) (n_3^2 - n_1^2) f^3 A_0^3 A_0^3 I_1}{4PU^4 (n_1^2 - n_2^2)^{3/2} e} \quad (26)$$

式中  $U, W, V$  关系由 (4) 式和 (11) 式决定。

假定两波导分离的相当远, 则可以采用与圆柱坐标相似的处理方法 (见图 3), 根据文献 [10], 有:

$$r_1 = \sqrt{d^2 + r_2^2 + 2r_2 d \cos \phi_2} \approx d + r_2 \cos \phi_2$$

类比可得:

$$\zeta_1 \approx d + \zeta_2 \cos \eta_2 \quad (27)$$

由于两光纤相距无穷远, 注意到  $Re(z) \rightarrow \infty$  时, 有  $Ce_{2s}(z, q)$  的渐近公式<sup>[11]</sup>:

$$Ce_{2s}(z, q) \sim \frac{ce_{2s}(0)ce_{2s}(\pi/2)}{A_0^{(2s)}} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{2s} q^{1/4} \exp(-z/2) \times \cos(\sqrt{q} e^z - \pi/4). \quad (28)$$

所以积分  $I_1$  中光纤 1 的作用  $Ce'_0(\xi_1) = d Ce_0(\xi_1)/d \xi_1$  用(28)式表示并求导, 光纤 2 的影响  $Ce'_0(\xi_2) = d Ce_0(\xi_2)/d \xi_2$  用(21)式展开再求导, 代入(25)中, 可得:

$$I_1 = -\sqrt{\frac{\gamma_1}{2\pi}} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \exp(-\xi_1/2) \cos(\gamma_1 \exp(\xi_1) - \frac{\pi}{4}) - \gamma_1 \exp(\xi_1/2) \sin(\gamma_1 \exp(\xi_1) - \frac{\pi}{4}) \right] \times \left\{ \frac{d}{d \xi_2} \left[ \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s A_2^{(s)} J_{2s}(2\gamma_1 \text{ch } \xi_2) \right] \right\} \times (\text{ch } 2\xi_2 - \cos 2\eta_2) d\xi_2 d\eta_2.$$

作为一级近似, 取  $s = 1$ , 则:

$$I_1 \approx \sqrt{\frac{\gamma_1}{2\pi}} (-i_1 + i_2 - i_3 + i_4) \quad (29)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \gamma_1 A_0^{(0)} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \exp(-\xi_2/2) \cos[\gamma_1 \exp(\xi_1) - \pi/4] \text{sh } \xi_2 J_0(2\gamma_1 \text{ch } \xi_2) (\text{ch } 2\xi_2 - \cos 2\eta_2) d\xi_2 d\eta_2 \\ i_2 &= \gamma_1 A_2^{(0)} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \exp(-\xi_2/2) \cos[\gamma_1 \exp(\xi_1) - \pi/4] \text{sh } \xi_2 J_2(2\gamma_1 \text{ch } \xi_2) (\text{ch } 2\xi_2 - \cos 2\eta_2) d\xi_2 d\eta_2 \\ i_3 &= 2\gamma_1^2 A_0^{(0)} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \exp(\xi_2/2) \sin[\gamma_1 \exp(\xi_1) - \pi/4] \text{sh } \xi_2 J_0(2\gamma_1 \text{ch } \xi_2) (\text{ch } 2\xi_2 - \cos 2\eta_2) d\xi_2 d\eta_2 \\ i_4 &= 2\gamma_1^2 A_2^{(0)} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \exp(\xi_2/2) \sin[\gamma_1 \exp(\xi_1) - \pi/4] \text{sh } \xi_2 J_2(2\gamma_1 \text{ch } \xi_2) (\text{ch } 2\xi_2 - \cos 2\eta_2) d\xi_2 d\eta_2 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

上式中  $\xi_1$  用(27)式代入, 用 Romberg 方法对  $i_1 \sim i_4$  进行数值积分, 最后结果应有 3 次代数精度。在确定  $U$ 、 $W$ 、 $V$  间关系时, 由于 Mathieu 函数计算的复杂性, 为了简化计算, 在截止条件  $W = 0$  近似下, 将(26)式的结果显示在图 4、图 5 中, 其中  $(P/A_0 A_0)$  为某一常数。从图 4 可以看出: 随着偏心率的增加, 耦合系数逐渐减小, 在  $0 < e < 0.6$  范围内, 曲线变化较为平坦, 在  $0.6 < e < 0.8$  范围内, 曲线快速下降, 在  $0.8 < e < 1.0$  内数值较为接近; 在  $e > 0.6$  以后误差较大, 这与计算中假设轻微椭圆, 并利用(24)式有关, 更精确的计算需从(20)开始。图 5 中在偏心率相同时, 随半长轴  $a$  的增加, 耦合量增大, 这与已知的圆光纤半径增大耦合作用增加有点相似; 在半长轴相同时, 偏心率越小, 耦合效应越强。由于在分析处理椭圆柱与圆柱, 抛物柱时, 所用的电磁场波函数完全不同, 要把椭圆截面的结果未经修正直接与圆截面或抛物截面进行比较是困难的。考虑到椭圆光纤的耦合特性, 结合椭圆光纤的传输性质(如归一化截止频率较圆柱光纤小等), 完全可以设计出一类新型的光纤器件。

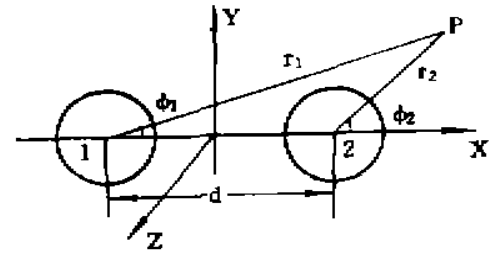


Fig. 3 The approximation of cylindrical coordinates

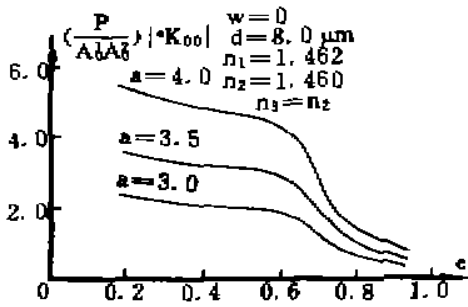


Fig. 4 Coupling coefficient as a function of eccentricity

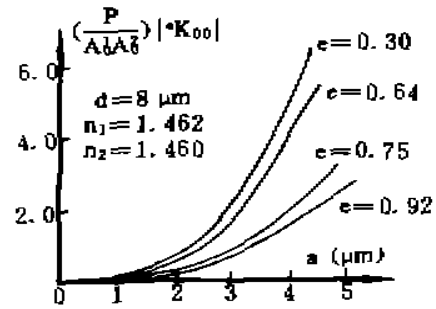


Fig. 5 Coupling coefficient as a function of half major axis

**结束语** 本文采用 Mathieu 函数和数学方法上的近似处理, 得到了适用于新型椭圆光纤器件设计的基偶模耦合系数公式, 计算了匹配包层光纤的耦合系数; 基奇模的  ${}^0K_{00}$  或其他高次模的  ${}^mK_m$ , 也可采用类似方法求解。对于特殊要求, 如果要进一步提高计算精度, 或更准确的解析式, 可取更多的展开式项数, 或者用椭圆柱函数的加法公式代替(27)式, 但解析表达式将更加繁复, 数值结果的计算量更大。

### 参 考 文 献

- [1] V. Bernát, A. L. Yarin, Solution of stresses and material birefringence in optical fibers with noncircular cladding. *J. Lightwave Technol.*, 1992, 10(4): 413~417
- [2] F. Zhang, John W. Y. Lit, Temperature and strain sensitivities of high-birefringence elliptical fibers. *Appl. Opt.*, 1992, 31(9): 1239~1243
- [3] 陈冠三, 椭圆包层光纤场的迭代近似解与漏模损耗计算. *光学学报*, 1994, 14(4): 398~392
- [4] N. S. Kapany, J. J. Burke, *Optical Waveguides*. New York & London Academic Press, 1992: 258~292
- [5] 林为干, *电磁场工程*, 北京, 人民邮电出版社, 1982: 299~416
- [6] M. J. Adams, *An Introduction to Optical Waveguides*. New York, John Wiley & Sons, 1981: 250~260
- [7] J. R. Cozenz, R. B. Dyott, Higher-mode cutoff in elliptical dielectric waveguides. *Electron. Lett.*, 1979, 15(18): 558~559
- [8] D. Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguide*. New York & London, Academic Press, 1974: 95~131
- [9] 叶培大, *光纤理论*. 上海, 知识出版社, 1985: 42~77
- [10] D. Marcuse, *Light Transmission Optics*. New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1972: 415~439
- [11] 王竹溪, 郭敦仁, *特殊函数概论*. 北京, 科学出版社, 1979: 680~728

## Calculation for Coupling Coefficient of Concentric Elliptical Fibers

Wang Limeng      Yan Runsheng

(Quality Inspection and Test Centre, Shanghai Transmission Lines Research Institute,  
The Ministry of Electronics Industry, Shanghai 200437)

(Received 6 November 1994; revised 25 February 1995)

**Abstract** According to the principle of coupling mode and the electromagnetic fields in fiber core and cladding with concentric ellipticity expressed by Mathieu functions, the analytical function formula is given in this paper for coupling coefficient of even mode in ground mode field under proper approximation conditions. The results of the eccentricity against coupling coefficient and the half major axis against coupling coefficient are obtained at cutoff frequency.

**Key words** elliptical Fiber, coupling coefficient.