

非旋波近似下 J-C 模型中原子的 压缩效应：数值研究途径

谢瑞华 徐躬耦

(南京大学物理系, 南京 210008)

刘敦桓

(武汉大学物理系, 武汉 430072)

摘 要 借助于数值对角化方法, 研究了非旋波近似下 J-C 模型中原子的压缩效应, 结果表明, 在近可积区能观察到此种效应及其周期衰变与回复现象, 而在远离近可积区这些特征消失。

关键词 近可积极限, 原子压缩效应, 衰变与回复现象, 原子相干态, J-C 模型。

1 引 言

近年来, 在高 Q 微波腔实验中所取得的辉煌成就^[1], 使人们能够在实验中探讨场与原子作用所导致的动态特征。因 J-C 模型预言的一些非经典现象已在实验中观察到^[2], 人们对此模型的热情再度兴起, 进而作了许多非常深入而有意义的研究^[3]。

非旋波近似下的 J-C 模型因其哈密顿的本征态不能封闭而未能精确求解, 尽管如此, 近年来, 人们对它的兴趣一直未减。Graham 等人首先对此模型作了数值探讨^[4]; 认为虚光场(由非旋波项描述)是兰姆位移的根源^[5], 能确保原子与场作用系统的因果性^[6]及使光场频率发生漂移^[7]; 即使旋波近似条件有效, 虚光场效应对原子反转和光子统计的影响不可忽略^[8]。Lais 等人^[9]研究了虚光子过程对光场压缩的影响; 作为量子混沌的一个实际物理系统, 其能谱统计特性已有较系统的工作^[4, 10]。

由于压缩光在光通讯和弱信号探测等方面具有潜在而重要的应用前景^[11], 因此人们对它作了许多理论^[12]和实验^[13]研究。与此同时, 也对原子的压缩特性作了一些较为深入的探讨^[14, 15]。研究结果表明, 压缩原子导致压缩光场^[14]及真空场 J-C 模型中光场压缩和原子压缩具有一定的对称性^[15], 可见, 研究原子的压缩效应是很有意义的。

本文将探讨非旋波近似下 J-C 模型中原子的压缩特性。结果表明, 原子的压缩行为主要出现在近可积区范围内。

2 理论模型及数值方法

考虑一个两能级原子通过单光子跃迁与一单模腔场作用的系统。不计及热库作用,在非旋波近似下,其哈密顿算符可表述为:

$$H = \Omega a^+ a + \omega S_z + G(a^+ + a)(S_+ + S_-), \quad (1)$$

其中 S_z 和 S_{\pm} 分别为原子反转及跃迁算符, ω 为原子跃迁频率, a^+ 和 a 为场膜产生与湮灭算符, Ω 为场的频率, G 为场与原子的相互作用常数。本文均取 $\hbar = 1$ 。

在下面的数值计算过程中,取 $|m, n\rangle$ 为基态,其中 $S_z|m, n\rangle = m|m, n\rangle$ ($m = \pm 1/2$) 和 $a^+ a|m, n\rangle = n|m, n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)。然后,利用数值对角化方法^[4],将无限维矩阵在有限维处截断便可获得哈密顿算符的本征态 $|\phi_i\rangle$ 及其本征能量 E_i ($i = 1, 2, \dots, M$)。如果给定系统初态 $|\psi(0)\rangle$,由下式则可算得力学量 A 的期待值

$$\langle A \rangle = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \sum_{i,j} \langle \psi(0) | \phi_i \rangle \langle \phi_j | A | \phi_i \rangle \langle \phi_j | \psi(0) \rangle \exp[-i(E_j - E_i)t]. \quad (2)$$

3 近可积极限

因哈密顿算符仅有两个相对重要的量,故可将(1)式改写成

$$\bar{H} = H / \sqrt{\Omega\omega} = \sqrt{\Omega/\omega} a^+ a + \sqrt{\omega/\Omega} S_z + G / \sqrt{\Omega\omega} (a^+ + a)(S_+ + S_-) = \bar{H}^{(0)} + V, \quad (3)$$

显然,上式存在如下一些近可积极限 $\bar{H}^{(0)}$,而围绕这些极限视为微扰。

1) 当 $G / \sqrt{\Omega\omega} \ll 1$ 和 $\Omega/\omega \approx 1$:

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(0)} &= \sqrt{\Omega/\omega} a^+ a + \sqrt{\omega/\Omega} S_z + G / \sqrt{\Omega\omega} (aS_+ + a^+S_-), \\ V &= G / \sqrt{\Omega\omega} (aS_- + a^+S_+). \end{aligned} \quad (4)$$

在 $\bar{H}^{(0)}$ 中,除能量 E 外还有守恒量 $(a^+ a + S_z)$ 。如果忽略 V ,这就是旋波近似情况^[4]。

2) 当 $G / \sqrt{\Omega\omega} \gg 1$ 和 $\Omega/\omega \approx 1$:

$$\bar{H}^{(0)} = G / \sqrt{\Omega\omega} (a^+ + a)(S_+ + S_-), \quad V = \sqrt{\Omega/\omega} a^+ a + \sqrt{\omega/\Omega} S_z. \quad (5)$$

可见,偶极矩的失散部分 $S_z = (1/2)(S_+ + S_-)$ (详见下节说明)和 $(a^+ + a)$ 为守恒量。如果忽略 V ,则具有不同光子数和不同 S_z 值的状态近似简并。

3) 当 $G / \sqrt{\Omega\omega} \approx 1$ 和 $\Omega/\omega \ll 1$:

$$\bar{H}^{(0)} = \sqrt{\omega/\Omega} S_z + G / \sqrt{\Omega\omega} (a^+ + a)(S_+ + S_-), \quad V = \sqrt{\Omega/\omega} a^+ a. \quad (6)$$

除能量 E 外还有守恒能量 $(a^+ + a)$ 。如果忽略 V ,则具有不同光子数的状态简并。事实上,这种情形就绝热近似^[4]。

4) 当 $G / \sqrt{\Omega\omega} \approx 1$ 和 $\Omega/\omega \gg 1$:

$$\bar{H}^{(0)} = \sqrt{\Omega/\omega} a^+ a + G / \sqrt{\Omega\omega} (a^+ + a)(S_+ + S_-), \quad V = \sqrt{\omega/\Omega} S_z. \quad (7)$$

除能量 E 外还有守恒能量 S_z 。如果忽略 V ,可认为具有不同 S_z 的状态简并。此种情况恰为准简并极限^[4]。

4 非旋波近似下原子压缩效应

为探讨原子的压缩特性,定义两个相位正交的原子算符 S_x 和 S_y 为^[14, 15]:

$$S_z = (1/2) (S_+ + S_-), \quad S_y = (1/2i) (S_+ - S_-), \quad (8)$$

它们服从如下对易关系:

$$[S_z, S_y] = i S_x \quad (9)$$

事实上 S_x 和 S_y 分别对应偶极矩的色散和吸收部分^[14]。如果原子有压缩效应, 则要求^[14, 15]:

$$S_x = (\Delta S_z)^2 - (1/2) |\langle S_z \rangle| < 0, \quad \text{或} \quad S_y = (\Delta S_y)^2 - (1/2) |\langle S_z \rangle| < 0. \quad (11)$$

本文假定系统初始处于原子相干态和光场真空态^[14, 15], 即:

$$|\psi(0)\rangle = \cos(\theta/2) \exp(-i\phi/2) |(1/2), 0\rangle + \sin(\theta/2) \exp(i\phi/2) |-(1/2), 0\rangle. \quad (12)$$

其中, $0 \leq \theta \leq \pi$, 表征初始原子分布; ϕ 是原子初始位相, 本文计算中取 $\phi = 0$ 。

首先, 给出旋转近似下 S_1 和 S_2 随时间演化的动态关系

$$S_1(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left\{ \sin(\theta) \left[\cos(At) \cos(\Omega t - \phi + \frac{\Delta}{2}t) - \Delta \frac{\sin(At)}{2A} \sin(\Omega t - \phi + \frac{\Delta}{2}t) \right] \right\}^2 - \frac{1}{4} \left| \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\Delta^2/4 + G^2 \cos(2At)}{A^2} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|, \quad (13)$$

$$S_2(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left\{ \sin(\theta) \left[\cos(At) \cos(\Omega t - \phi + \frac{\Delta}{2}t) - \Delta \frac{\sin(At)}{2A} \cos(\Omega t - \phi + \frac{\Delta}{2}t) \right] \right\}^2 - \frac{1}{4} \left| \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\Delta^2/4 + G^2 \cos(2At)}{A^2} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|, \quad (14)$$

其中, Δ 为失谐量, $A = \sqrt{(\Delta/2)^2 + G^2}$ 。根据上式可见, 当原子初时处于基态或激光态时 S_x 和 S_y 不能压缩, 且可证明原子初时处于相干态, 则可观察到原子的压缩行为。图 1 为 $G = 0.025$, $\theta = 2\pi/3$, $\Delta = 0$ 时 S_1 随时间的演化行为, 从中可观察到 S_1 的周期衰变与回复现象, 而在其衰变区原子偶极矩的 S_x 分量可压缩。

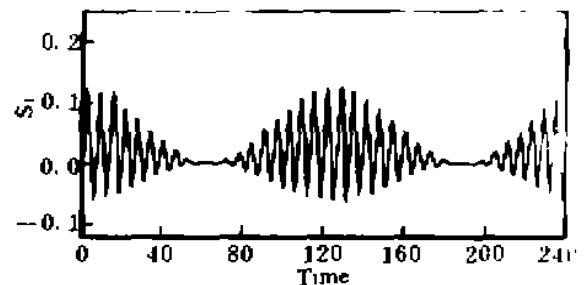


Fig. 1 Time evolution of S_1 in the J-C model with the RWA for $\Omega = 0.5$, $\Omega/\omega = 1.0$, $G/\sqrt{\Omega\omega} = 0.05$, $\theta = 2\pi/3$ and $\phi = 0$

下面以 S_x 分量为例研究非旋波近似下原子的压缩特性。

在近可积情形 1) 时。图 2 给出 $\theta = 2\pi/3, \pi$ 、其余参数同图 1 时, S_1 随时间的演化行为。当 $\theta = 2\pi/3$, 对比图 2(a) 与图 1 可见, 旋波近似下 J-C 模型所预言的压缩特征并未因虚光子过程的参与而受很大的影响。当 $\theta = \pi$ 时, 图 2(b) 与其对应的旋波情形一样, S_x 未能压缩, 但有趣的是, 由于虚光子过程与实光子过程相干作用, 观察到了旋波近似下未能出现的 S_1 的周期衰变与回复现象, 由此说明, 即使旋波近似条件有效, 由于虚光场作用, 将呈现出丰富的动态特征。

图 3(a) 为在近可积情形 2) 时, 取 $G = 100$, 观察到 S_x 周期压缩行为, 其压缩幅度在各压缩区有所不同, 且压缩量较图 2(a) 小。

图 3(b)、3(c) 为近可积情形 3)、4) 时, S_1 的动态特征, 从图中也可观察到 S_x 的周期压缩行为, 其中, 图 3(c) 情形中的压缩时间量较图 2、图 3(a)、图 3(b) 各情形的长。

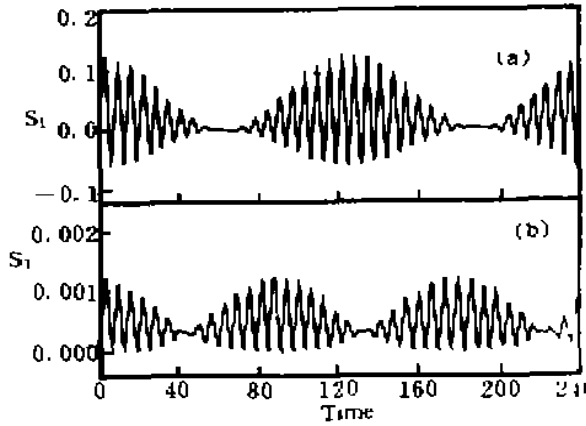


Fig. 2 Time evolution of S_1 in the J-C model without the RWA for (a) $\theta = 2\pi/3$, (b) $\theta = \pi$, the others same as for Fig. 1

在远离上述近可积极限情形，在图 4(a)、图 4(b) 中给出了 $G=0.5$ 、其余参数同图 2 时 S_1 随时间的演化特征。从中发现，图 2 中出现的压缩效应及 S_1 的周期衰变与回复现象已消失。显然，这些现象消失的根源在于虚光子过程参与实际的物理过程，但这些现象为何会消失？目前尚无法解释。

5 结果和讨论

由上述数值结果可见，在近可积极限区域内可观察到原子的压缩特性及其周期衰变与回复现象，而在远离这些极限区，上述特征消失。进而表明，系统可积与否影响原子的压缩行为，即在近可积情形观察到压缩效应的可能性大。文献[10]曾获此系统的“相图”，由它可清楚地反映系统本身的可积与不可积特性，故此相图对研究压缩特性很有帮助。当然，本文在此相图参数范围内所观察到的现象也间接地反映了系统的相变过程，即在远离近可积极限区，压缩特征或衰变与回复现象消失。

应当指出，在上面的数值计算过程中， G 的取值远远大于实验所能达到的范围 ($G \approx 10^{-6}$ [16])，此处数值结果在实验中难于观察到，因而，本文只有其理论本身的研究价值及对研究实际物理系统的量子混沌特性有一定的参考作用。

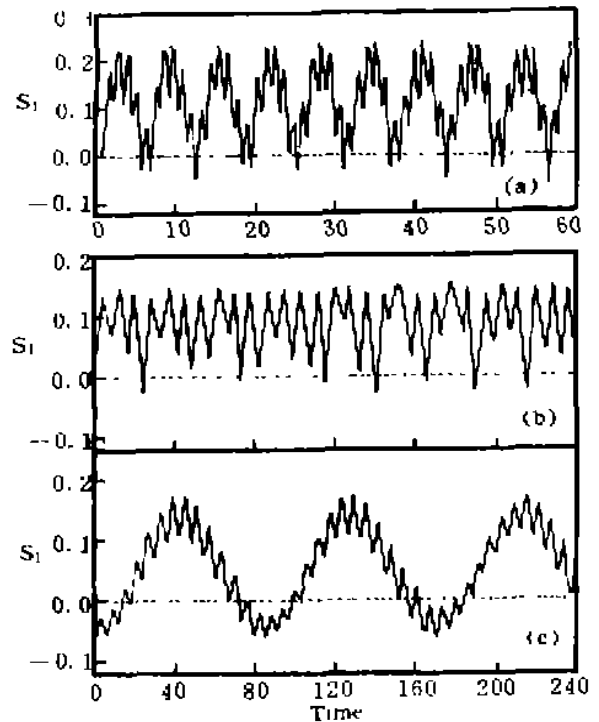


Fig. 3 Time evolution of S_1 in the J-C model without the RWA for $\theta = 2\pi/3$ and $\phi = 0$. (a) $\Omega = 0.5$, $G/\sqrt{\Delta\omega} = 200$, $\Delta/\omega = 1.0$, (b) $\Omega = 0.1$, $G/\sqrt{\Delta\omega} = 1.0$, $\Delta/\omega = 1/81$, (c) $\Omega = 1.0$, $G/\sqrt{\Delta\omega} = 1.0$, $\Delta/\omega = 25.0$

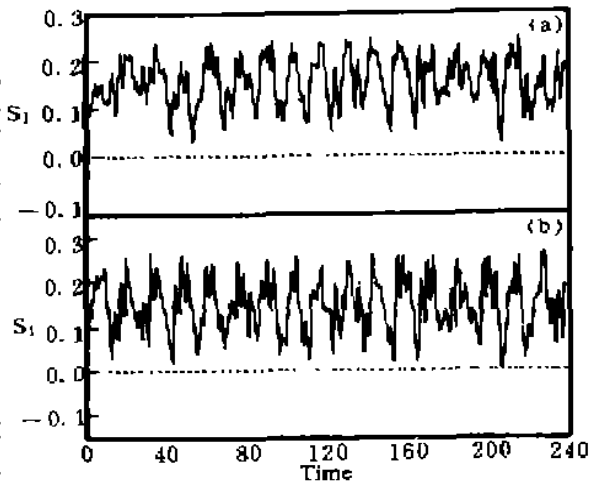


Fig. 4 Time evolution of S_1 in the J-C model without the RWA for $G/\sqrt{\Delta\omega} = 1.0$, the others same as for Fig. 2

参 考 文 献

- [1] P. Goy, J. M. Raimond, M. Gross *et al.*, Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.*, 1983, **50**(24): 1903~1906
- [2] G. Rempe, H. Walther, N. Lein, Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(4): 353~356
- [3] V. Buzek, I. Jex, Dynamics of a two-level atom in a Kerr-like medium. *Opt. Commun.*, 1990, **78**(5, 6): 425~435, and references therein
- [4] R. Graham, M. Hohnerbach, Statistical spectral and dynamical properties of two-level systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **57**(11): 1378; Quantum theory of chaotical Rabi oscillations, in: *Quantum Measurement and Chaos*, Plenum, New York, 1987: 147~162
- [5] G. Compagno, R. Passante, F. Persico, The role of the cloud of virtual photons in the shift of the ground state energy of a hydrogen atom. *Phys. Lett. (A)*, 1983, **98**(5, 6): 253~255
- [6] G. Compagno, G. M. Palma, R. Passante *et al.*, Virtual-photon field, causal photon absorption and photodetectors. *Euro. Phys. Lett.*, 1989, **9**(3): 215~220
- [7] J. S. Peng, G. X. Li, Phase fluctuation in the Jaynes-Cummings model with and without the rotating-wave approximation. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(5): 3289~3293
李高翔, 彭金生, 旋波近似和非旋波近似下 Jaynes-Cummings 模型中光场位相涨落. *物理学报*, 1992, **41**(5): 766~772
- [8] K. Zaheer, M. S. Zubairy, Atom-field interaction without the rotating-wave approximation: a path-integral approach. *Phys. Rev. (A)*, 1988, **37**(5): 1628~1633
S. J. D. Phoenix, Counter-rotating contributions in the Jaynes-Cummings model. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(9): 1163~1172
R. H. Xie, G. O. Xu, D. H. Liu, Photon antibunching in the vacuum field two-photon JCM without the RWA. *J. Mod. Opt.*, 1995, **42**(10): 823~827
- [9] P. Lais, T. Steimle, Squeezing in the Jaynes-Cummings model without the RWA. *Opt. Commun.*, 1990, **78**(5, 6): 346~350
J. S. Peng, G. X. Li, Influence of the virtual-photon processes on the squeezing of light in the two-photon Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **47**(4): 3167~3172
彭金生, 李高翔, 虚光子过程对光场压缩效应的影响. *物理学报*, 1993, **42**(4): 568~574
- [10] R. H. Xie, D. H. Liu, G. O. Xu, Spectrum statistics in a quantum optical model. *Z. Phys. B.*, 1995, **98**(3)
- [11] P. Meystre, M. O. Scully, E. Giacobina *et al.*, Quantum Noise Reduction in Optical System-Experiments. *Appl. Phys. (B)*, 1992, **55**(3): 189~313
- [12] R. Loudon, P. L. Knight, Squeezed light. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(6, 7): 709~759
- [13] R. M. Shelby, M. D. Levenson, S. H. Perlmuter *et al.*, Broad-band parametric deamplification of quantum noise in an optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **57**(6): 691~694
- [14] D. F. Walls, P. Zoller, Reduced quantum fluctuations in resonance fluorescence. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **47**(10): 709~711
- [15] G. Hu, P. K. Aravind, Dynamical symmetries of the vacuum field Jaynes-Cummings model. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1989, **6**(9): 1757~1763
- [16] L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall *et al.*, Generation of squeezing states by parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **57**(20): 2520~2523

Squeezing of Atom in the Jaynes-Cummings Model without the RWA —— A Numerical Approach

Xie Ruihua Xu Gongou

(Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210008)

Liu Dunhuan

(Department of Physics, Wuhan University, Wuhan 430072)

(Received 11 November 1994; revised 15 March 1995)

Abstract By virtue of a numerical method of truncating an infinite matrix to finite order, we have investigated the squeezing properties of atom in the Jaynes-Cummings (J-C) model. Numerical results have shown that dipole squeezing and quantum collapse-revival phenomena can be observed in the cases rather close to integrable limits, while these features disappear in the cases far from these limits.

Key words integrable limits, squeezing of atom, collapse-revival phenomena, atomic coherent state, Jaynes-Cummings model.