

有轴向磁场的平面摆动器 自由电子激光的自发辐射

文双春

(湖南衡阳师范高等专科学校物理系, 衡阳 421008)

摘 要 研究了电子在有轴向磁场的平面摆动器中的辐射, 得到了一个较普遍的自发辐射谱表达式, 谱线的形状也是由函数 $\text{sinc}(u)$ 决定, 当电子的能量较高或者沿摆动器轴线观察时, 辐射是椭圆极化的。数值分析表明: 在平面摆动器中附加适当的轴向磁场, 可以提高各次谐波辐射的强度, 对于基波和较低次谐波, 提高更明显。

关键词 轴向导引磁场, 平面摆动器, 自由电子激光, 自发辐射。

1 引 言

Sprangle 等人^[1]在 1974 年首次提出了在自由电子激光器装置中加轴向磁场的思想。业已表明, 在许多自由电子激光实验中, 附加轴向导引磁场已常常是必不可少。在螺旋型摆动器中加轴向导引磁场不仅可以改变自由电子激光相互作用, 而且在磁共振处使增益和效率显著提高^[2]。在这种情形, 当电子束理想注入时, 不出现纵向振荡运动, 因而不产生高次谐波辐射, 但是如果将轴向导引磁场反向, 则有可能产生高次谐波^[3]。在平面摆动器中加轴向导引磁场, 情况要复杂得多^[4-6], 目前的研究大多是基于基波的行为。在这种组合磁场中, 由于径向不对称性, 不在轴上的电子有净的横向漂移^[4], 但是当电子束的半径很小, 又不太接近磁共振条件且相互作用长度又不是太长以致产生较大的束扩散时, 可以忽略电子的漂移运动^[5, 6], 此时电子在摆动器和轴向磁场中作椭圆型运动, 产生的辐射一般为椭圆极化^[4]。本文根据已经得到的电子轨迹, 按照相对论性电子产生辐射的规律, 计算并分析电子在加轴向导引磁场的平面摆动器中运动所产生的辐射谱分布, 分析轴向导引磁场对自发辐射的影响。

2 电子的运动轨迹

本文采用单粒子、经典近似理论来计算自发辐射谱。摆动器和轴向磁场的组合场为

$$\mathbf{B} = e_y B_w \sin k_w z + e_z B_0 \quad (1)$$

式中 B_w 是摆动器磁场的幅值, k_w 是摆动器波数($k_w = \omega/c$), B_0 是恒定轴向磁场。一个相对论性电子(电荷为 e , 静止质量为 m , 能量为 γmc^2)沿 z 轴以速度 $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$ 通过组合磁场 \mathbf{B} 的运动方程为

$$\frac{d}{dt}(\gamma\beta) = \frac{e}{mc}(\beta \times \mathbf{B}), \quad \frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad (2)$$

当电子束理想注入时, 联立(1), (2)式可求得电子的轨迹和速度^[4]

$$\begin{cases} x = (\beta_{\parallel} K / \gamma_0 k_w)(1 - \epsilon^2)^{-1} \cos k_w z \\ y = (\beta_{\parallel} K / \gamma_0 k_w)(1 - \epsilon^2)^{-1} \epsilon \sin k_w z \\ z = \beta_{\parallel} ct + (K^2 / 8k_w \gamma_0^2)(1 - \epsilon^2)^{-1} \sin 2k_w z \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \beta_x = -(\beta_{\parallel} K / \gamma_0)(1 - \epsilon^2)^{-1} \sin k_w z \\ \beta_y = (\beta_{\parallel} K / \gamma_0)(1 - \epsilon^2)^{-1} \epsilon \cos k_w z \\ \beta_z = \beta_{\parallel} + (K^2 / 4\gamma_0^2)(1 - \epsilon^2)^{-1} \cos 2k_w z \end{cases} \quad (4)$$

式中 $K = eB_w / (mc\omega_c)$, $\epsilon = \omega_b / \omega_c$, $\omega_b = eB_0 / (\gamma_0 mc)$ 是拉莫尔频率, γ_0 是由(2)式求得的不变相对论因子, β_{\parallel} 和 γ_{\parallel} 分别为

$$\beta_{\parallel} = (1 - \gamma_{\parallel}^2)^{-1/2}, \quad \gamma_{\parallel} = \gamma_0 [1 + K^2(1 + \epsilon^2) / 2(1 - \epsilon^2)^2]^{-1/2} \quad (5)$$

$\epsilon = 1$ 是共振条件, 由(3)式可知, x 和 y 的幅值是不相等的, 这就导致电子在 xy 平面沿椭圆型轨道运动。电子轨道的偏心率为

$$\begin{aligned} e_t &= (1 - \epsilon^2)^{-1/2}, & (\epsilon < 1) \\ e_t &= (1 - \epsilon^2)^{1/2}, & (\epsilon > 1) \end{aligned} \quad (6)$$

3 自发辐射谱的计算和讨论

电子作加速运动的自发辐射谱为^[7]

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta) \exp [i(\omega t - k_L \mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] dt \right|^2 \quad (7)$$

式中 ω 和 k_L 分别为辐射的圆频率和波数, $\omega = ck_L$, \mathbf{n} 是球坐标系中辐射方向的单位矢量

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \theta \quad (8)$$

利用 $\gamma \gg 1$, 和 $\theta \sim 1/\gamma$ ^[7], 则有

$$\sin \theta = o(1/\gamma), \quad \cos \theta = 1 - o(1/\gamma^2) \quad (9)$$

同时由(4)式知, $\beta_x \sim 1/\gamma$, $\beta_y \sim 1/\gamma$, 因此, 忽略二阶以上无穷小量, 可得到

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_x \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_z (1 - \theta^2/2) \quad (10)$$

$$\begin{cases} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta)]_x = [\beta_{\parallel} K / \gamma_0 (1 - \epsilon^2)] \sin k_w z + \beta_{\parallel} \theta \cos \varphi \\ [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta)]_y = -[\beta_{\parallel} K \epsilon / \gamma_0 (1 - \epsilon^2)] \cos k_w z + \beta_{\parallel} \theta \sin \varphi \\ [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta)]_z = -[\beta_{\parallel} K \theta / \gamma_0 (1 - \epsilon^2)] \cos \varphi \sin k_w z \\ \quad + [\beta_{\parallel} K \theta \epsilon / \gamma_0 (1 - \epsilon^2)] \sin \varphi \cos k_w z - \beta_{\parallel} \theta^2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\omega t - k_L \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \frac{k_L}{k_R} [k_w z - \alpha \cos k_w z - \zeta \sin k_w z - \eta \sin 2k_w z] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \exp [i(\omega t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(f\alpha) J_n(f\zeta) J_l(f\eta) \\ &\quad \times \exp [i(f + m - n - 2l + \delta k / k_R) k_w z] \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = \beta_{\parallel} k_R K \theta \cos \varphi \gamma_0 k_w (1 - \epsilon^2), \\ \zeta = \beta_{\parallel} k_R K \theta \epsilon \sin \varphi \gamma_0 k_w (1 - \epsilon^2) \\ \eta = k_R K^2 / 8k_w \gamma_0^2 (1 - \epsilon^2) \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} k_R = \frac{k_w}{1 - \beta_z \cos \theta} = \frac{2k_w \mathcal{Y}_0^2}{1 + K^2(1 + \epsilon^2)/2(1 - \epsilon^2)^2 + \mathcal{Y}_0^2 \theta^2} \\ k_L = f k_R + \delta k \end{cases} \quad (15)$$

k_R 是共振波数, f 是谐波次数, δk 是失谐量。

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) \exp [i(\omega t - k_L \mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \{ \mathbf{e}_x [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})]_x + \mathbf{e}_y [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})]_y + \mathbf{e}_z [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})]_z \} \\ & \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(f\alpha) J_n(f\zeta) J_l(f\eta) \exp [ik_w z (f + m - n - 2l + \delta k/k_R)] \\ &= e_x T_x + e_y T_y + e_z T_z \end{aligned} \quad (16)$$

将(11)和(13)式代入(16)式得

$$\begin{cases} T_x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(f\alpha) J_n(f\zeta) J_l(f\eta) (2\pi N_w/k_w) \exp(iu) \operatorname{sinc}(u) \\ \quad \times \{ [i\beta_{\parallel} K/2\mathcal{Y}_0(1 - \epsilon^2)] (\delta_{f-1, n-m+2l} - \delta_{f+1, n-m+2l}) + \beta_{\parallel} \theta \cos \mathcal{Q} \delta_{f, n-m+2l} \} \\ T_y = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(f\alpha) J_n(f\zeta) J_l(f\eta) (2\pi N_w/k_w) \exp(iu) \operatorname{sinc}(u) \\ \quad \times \{ [-\beta_{\parallel} K \epsilon / 2\mathcal{Y}_0(1 - \epsilon^2)] (\delta_{f-1, n-m+2l} + \delta_{f+1, n-m+2l}) + \beta_{\parallel} \theta \sin \mathcal{Q} \delta_{f, n-m+2l} \} \\ T_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(f\alpha) J_n(f\zeta) J_l(f\eta) (2\pi N_w/k_w) \exp(iu) \operatorname{sinc}(u) \\ \quad \times \{ [-i\beta_{\parallel} K \theta \cos \mathcal{Q} 2\mathcal{Y}_0(1 - \epsilon^2)] (\delta_{f-1, n-m+2l} - \delta_{f+1, n-m+2l}) \\ \quad + [\beta_{\parallel} K \epsilon \theta \sin \mathcal{Q} 2\mathcal{Y}_0(1 - \epsilon^2)] (\delta_{f-1, n-m+2l} - \delta_{f+1, n-m+2l}) - \beta_{\parallel} \theta^2 \delta_{f, n-m+2l} \} \end{cases} \quad (17)$$

式中 $u = \pi N_w \delta k/k_R$, $\operatorname{sinc}(u) = \sin(u)/u$, J_m, J_n, J_l 是第一类整数阶贝塞尔函数, δ_{ij} 是克罗内克 δ 符号。将(16), (17)式代入(7)式, 最后求得自发辐射谱为

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} (|T_x|^2 + |T_y|^2 + |T_z|^2) \quad (18)$$

由(18)式知, 与没有轴向磁场的平面摆动器的自发辐射一样, 电子在有轴向磁场的平面摆动器中的自发辐射谱的线型由函数 $\operatorname{sinc}(u)$ 决定, 各次谐波辐射的线宽与摆动器的周期数成反比。

(16)和(17)两式表明, 电子在加轴向导引磁场的平面摆动器中的自发辐射是由分别沿 x, y, z 三个方向极化的平面波迭加而成, 迭加的结果并不是椭圆极化波。但同时可以看出, $|T_x| \sim 1/\mathcal{Y}$, $|T_y| \sim 1/\mathcal{Y}$, $|T_z| \sim \theta \mathcal{Y} \sim 1/\mathcal{Y}^2$, 所以当电子的 \mathcal{Y} 值很大或者观察角 θ 很小尤其是在轴上观察时, T_z 项相对于 T_x 和 T_y 来说可以忽略不计, 电子辐射为椭圆极化波。

(18)式是从一般的情形出发, 并计算到 $1/\mathcal{Y}^2$ 阶得到的, 它具有普遍性, 试用两种特殊情形来说明之。

1) $\epsilon = 0$

这种情形相当于在平面摆动器中没有加轴向磁场, 这时

$$\begin{cases} \alpha = \beta_{\parallel} k_R K \theta \cos \mathcal{Q} \mathcal{Y}_0 k_w \\ \zeta = 0 \\ \eta = K^2/2(2 + K^2 + 2\mathcal{Y}^2 \theta^2) \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} T_x = (2\pi N_w / k_w) [(i\beta_{\parallel} K / 2\mathcal{Y}_0) F_J + \beta_{\parallel} \theta \cos \mathcal{Q} M_J] \exp(iu) \operatorname{sinc}(u) \\ T_y = (2\pi N_w \beta_{\parallel} \theta \sin \mathcal{Q} k_w) M_J \exp(iu) \operatorname{sinc}(u) \\ T_z = 0 \end{cases} \quad (20)$$

式中定义

$$\begin{cases} F_J = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p J_{2p}(f\alpha) [J_{(f+1)/2+p}(f\eta) + J_{(f-1)/2+p}(f\eta)], & (f = 1, 3, 5\dots) \\ F_J = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p J_{2p+1}(f\alpha) [J_{f/2+p}(f\eta) - J_{f/2+p+1}(f\eta)], & (f = 2, 4, 6\dots) \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} M_J = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p J_{2p+1}(f\alpha) J_{(f+1)/2+p}(f\eta), & (f = 1, 3, 5\dots) \\ M_J = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p J_{2p}(f\alpha) J_{f/2+p}(f\eta), & (f = 2, 4, 6\dots) \end{cases} \quad (22)$$

自发辐射谱为

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2 N_w^2}{ck_w^2} \left[\frac{\beta_{\parallel}^2 K^2}{4\mathcal{Y}_0^2} F_J^2 + \beta_{\parallel}^2 \theta^2 M_J^2 \right] \operatorname{sinc}^2(u) \quad (23)$$

结果与 Dattoli 等人^[8]的相同, 文献[8]是利用广义贝塞尔函数计算到 $1/\mathcal{Y}^2$ 阶, 将其结果用贝塞尔函数表示, 它与本文的结果一致。本文的结果还覆盖了其它文献中所给出的关于平面摆动器的辐射谱的表达式, 例如, 忽略(23)式的修正项 $\beta_{\parallel}^2 \theta^2 M_J^2$, 结果与文献[9]的完全一致。

2) $\theta = 0$

这种情形相当于沿轴向的辐射, 这时

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \zeta = 0 \\ \eta = K^2(1 - \epsilon^2)/2[2(1 - \epsilon^2)^2 + K^2(1 + \epsilon^2)] \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} T_x = [i\pi N_w K \beta_{\parallel} / c\mathcal{Y}_0(1 - \epsilon^2)k_w] \exp(iu) \operatorname{sinc}(u) X_f(\eta) \\ T_y = -[\pi N_w K \beta_{\parallel} \epsilon / c\mathcal{Y}_0(1 - \epsilon^2)k_w] \exp(iu) \operatorname{sinc}(u) Y_f(\eta) \\ T_z = 0 \end{cases} \quad (25)$$

其中

$$\begin{cases} X_f(\eta) = (-1)^{(f-1)/2} [J_{(f-1)/2}(f\eta) - J_{(f+1)/2}(f\eta)], & (f = 1, 3, 5\dots) \\ Y_f(\eta) = (-1)^{(f-1)/2} [J_{(f-1)/2}(f\eta) + J_{(f+1)/2}(f\eta)], & (f = 1, 3, 5\dots) \end{cases} \quad (26)$$

因此自发辐射谱为

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{c} \left[\frac{4eN_w \eta \beta_{\parallel}}{K} \mathcal{Y}_0 f \right]^2 [X_f^2(\eta) + \epsilon^2 Y_f^2(\eta)] \operatorname{sinc}^2(u) \quad (27)$$

可以发现, 在轴上只有奇次谐波辐射, 且辐射是由沿 x 和 y 两个方向极化的两个平面波迭加而成。 T_x 和 T_y 分别是电子沿 x 轴和 y 轴的振荡产生的, 由(3)式知, 电子沿 y 轴比沿 x 轴振荡的相位落后 $\pi/2$, 这个相位差导致 $X_f(\eta)$ 和 $Y_f(\eta)$ 不一样。两个平面波的幅值比为

$$|T_y| / |T_x| = \epsilon Y_f(\eta) / X_f(\eta) = \sigma_f \quad (28)$$

而由(3)式知, $|y| / |x| = \epsilon$, 因此, 电子在 xy 平面沿椭圆型轨迹振荡产生椭圆极化的自发辐射, 而自发辐射的偏心率为

$$e_s = \begin{cases} (1 - \sigma_f^2)^{\frac{1}{2}}, & (\sigma_f < 1) \\ (1 - \sigma_f^{-2})^{\frac{1}{2}}, & (\sigma_f > 1) \end{cases} \quad (29)$$

可见, 两者的偏心率是不一样的, 自发辐射的偏心率 e_s 总是大于电子轨迹的偏心率 e_t 。值得注意的是, 当接近磁共振条件($\epsilon = 1$) 时, 由(25) 式知, $|T_x|$ 、 $|T_y|$ 趋于相等从而电子辐射趋于圆极化。

4 数值分析

为了考察轴向磁场对自发辐射的影响, 将(27) 式归一化为没有轴向磁场时摆动器轴线上的自发辐射谱是比较方便的, 这样, 自发辐射相对强度

$$RI = \{ \eta_f / \eta_0 [J_0(\eta_0) - J_1(\eta_0)] \}^2 [X_f^2(\eta) + \epsilon^2 Y_f^2(\eta)] \quad (30)$$

式中

$$\eta_0 = \eta|_{\epsilon=0} = K^2 / 2(2 + K^2) \quad (31)$$

分别取 $K = 1$ 和 $K = 3$, RI 随 ϵ 的变化规律如图 1 和图 2 所示。由图 1 和图 2 可看出, 对于每次谐波, RI 在 $\epsilon < 1$ 和 $\epsilon > 1$ 各有一个峰值, 对于基波, $\epsilon > 1$ 的峰值大于 $\epsilon < 1$ 的峰值, 而对于谐波($f > 1$), $\epsilon > 1$ 的峰值小于 $\epsilon < 1$ 的峰值; K 值增大时, 各次谐波辐射的相对强度都增强, 在 $K = 3$, $\epsilon < 1$ 的情形, 第 3, 5, 7 次谐波辐射的相对强度甚至超过基波的辐射强度; 对于基波, 自发辐射相对强度的两个峰值均大于 1, 对于谐波($f > 1$), 其相对强度在 $0 < \epsilon < 1$ 时的峰值均高于没有轴向磁场($\epsilon = 0$) 时的值, 这说明在平面摆动器中附加适当的轴向磁场, 可以提高自发辐射的强度, 对于较低次谐波, 提高更明显。

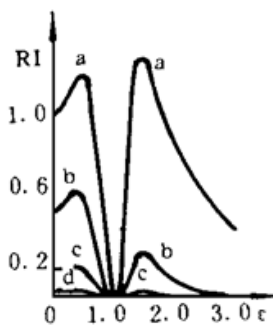


Fig. 1 Variation of the relative intensity of the spontaneous emission RI with ϵ for $K = 1$, curves a, b, c, d, e correspond to $f = 1, 3, 5, 7, 9$ respectively

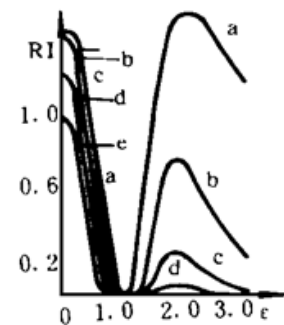


Fig. 2 Variation of the relative intensity of the spontaneous emission RI with ϵ for $K = 3$, curves a, b, c, d, e correspond to $f = 1, 3, 5, 7, 9$ respectively

结 论 根据相对论性电子产生自发辐射的一般规律, 计算了电子在加轴向导引磁场的平面摆动器中运动的自发辐射谱, 得到了一个关于平面摆动器自发辐射谱的一个较普遍的表达式。一般而言, 电子在加轴向磁场的平面摆动器中的自发辐射不是椭圆极化的, 只有当电子的能量极高或者在摆动器轴线上观察时, 辐射才是椭圆极化的, 但椭圆极化的自发辐射的偏心率总是大于椭圆型电子轨迹的偏心率。数值分析表明: 在平面摆动器中附加适当的轴向磁场, 可以提高各次谐波辐射的强度, 对于较低次谐波, 提高更明显; 对于谐波输出, 当自由电子激光器工作在较大 K 值且 $\epsilon < 1$ 情形时是有利的。

参 考 文 献

- [1] C. W. Roberson, P. Sprangle, A review of free-electron lasers. *Phys. Fluids B*, 1989, **1**(1): 3~ 41
- [2] H. P. Freund, P. Sprangle, D. Dillenburg *et al.*, Collective effects on the operation of free-electron lasers with an axial guide field. *Phys. Rev. A*, 1982, **26**(4): 2004~ 2015
- [3] L. M. Bali, T. P. Pandya, Pallavi Jha *et al.*, Higher free-electron laser frequencies with circularly polarized wigglers and axial magnetic fields. *Phys. Rev. A*, 1991, **43**(3): 1633~ 1635
- [4] H. P. Freund, R. C. Davison, G. L. Johnson, Linear theory of the collective Raman interaction in a free electron laser with a planar wiggler and an axial guide field. *Phys. Fluids B*, 1990, **2**(2): 427~ 435
- [5] Y. Z. Yin, G. Bekefi, Dispersion characteristics of a free electron laser with a linearly polarized wiggler and axial guide field. *J. Appl. Phys.*, 1984, **55**(1): 33~ 42
- [6] 尹元昭, 有线性摆动器和轴向引导磁场的自由电子激光器的自发辐射和受激喇曼辐射. 光学学报, 1984, **4**(3): 206~ 211
- [7] [美]J. D. 杰克逊著, 朱培豫译, 经典电动力学, 下册, 北京, 人民教育出版社, 1980: 244
- [8] G. Dattoli, L. Meri, M. Richetta *et al.*, Linear undulator brightness: Inclusion of sextupolar magnetic-field contributions and of higher-order energy corrections. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(6): 4023~ 4035
- [9] C. A. Brau, *Free-Electron Laser*. San Diego, Academic Press, Inc, 1990: 72

Spontaneous Emission of Free-Electron Laser with Plane Undulator and Axial Guide Magnetic Field

Wen Shuangchun

(Department of Physics, Hengyang Teachers College, Hengyang 421008)

(Received 19 October 1995; revised 11 March 1996)

Abstract Spontaneous emission of an electron in planar undulator with an axial guide magnetic field is investigated. A general expression for the emission spectrum is derived. The lineshape of the spectrum is determined by the function $\text{sinc}(u)$ and the spontaneous emission is elliptically polarized only when \mathcal{Y} is very large or observed on axis. Use of axial magnetic fields of appropriate strengths enhances the intensity of spontaneous emission spectrum, the enhancements are more marked at the principal and the lower harmonics.

Key words axial guide magnetic field, planar undulator, free electron laser, spontaneous emission.