

# 含 Cr 离子饱和吸收体被动调 Q 解析解

吴念乐 吕亚军 陆兴华 李家强 李师群  
(清华大学现代应用物理系, 北京 100084)

**摘 要** 讨论了慢恢复饱和吸收体的被动调 Q 过程。在合理简化被动调 Q 速率方程组的基础上, 得到了能反映激发态吸收效应的慢恢复饱和吸收体被动调 Q 的判据, 以及调 Q 脉冲的峰值功率、脉冲能量、脉冲宽度和能量利用率等调 Q 重要参量的解析表达式。结果具有一定的普遍性, 有助于这类被动调 Q 激光器的优化设计。

**关键词** 饱和吸收体, 被动调 Q, 激发态吸收。

## 1 引 言

调 Q 固体激光器是应用最为广泛的激光器之一。它能提供脉宽在数十纳秒乃至纳秒量级的高峰值功率的光脉冲。主动调 Q 固体激光器通常采用电-光或声-光开关, 这就要求外加脉冲高压源, 或高频驱动信号源, 使激光系统变得较为复杂。被动调 Q 固体激光器中, 使用染料作为调 Q 器件, 虽省去了一切外部附加设备, 但由于染料的化学稳定性差, 需要经常更换, 而且由于染料溶液的热性质不佳, 重复频率稍高时必须采用循环流动, 亦使系统复杂起来。固体饱和吸收体有好的热性质, 若再具备稳定的化学性质, 则是理想的被动调 Q 材料。色心氟化锂( $F_2 \cdot LiF$ ) 是较好的固体饱和吸收体, 但由于其色心具有退化(fading)现象, 使其应用也受到了限制。

近年来, 掺 Cr 离子的各种晶体材料受到了广泛的注意, 它们具有宽的吸收带和良好的饱和吸收性质, 非常适合作为固体被动调 Q 材料<sup>[1~8]</sup>。甚至有些含 Cr 离子和其它离子的双掺晶体, 例如 Cr, Nd·YAG, Cr, Nd·GSGG 等, 本身即是激光介质, 又同时可以起着饱和吸收体作用, 用它可构成自调 Q 固体激光器<sup>[3, 9, 10]</sup>, 使调 Q 固体激光器在稳定、可靠、长寿命、紧凑、简单实用的全固化发展方向上前进了一大步。

比起染料和色心氟化锂来, 上述含 Cr 离子晶体, 光化学性质稳定, 无退化现象<sup>[3]</sup>, 且热导性好, 损伤阈值高, 故近年来发展十分迅速。含 Cr 离子晶体很多还具有偏振方向选择的吸收特性, 从而不附加任何附加偏振元件即可输出偏振调 Q 脉冲。这种“自偏振”的特性是十分诱人的。含 Cr 离子晶体, 吸收带有在可见-近红外的(例如 Cr·YSO), 有在  $1 \mu m$  附近的(例如 Cr·YAG, Cr·GSGG 等), 可适用于范围广泛的很多激光器的调 Q。含 Cr 离子晶体的恢复时间较长, 一般在微秒量级, 较其产生的调 Q 脉冲的脉宽而言, 应称之为“慢恢复饱和吸收体”。

描述被动调 Q 过程一般使用包含增益介质原子反转数, 饱和吸收介质原子数和腔中光子

数的速率方程组<sup>[11]</sup>。由于各变量相互耦合,无法寻求解析解,一般只好用数值方法求解。对于应用含 Cr 离子晶体这类慢恢复饱和吸收体的被动调 Q 激光器,作者合理地简化了相应的速率方程组,求得了描述调 Q 过程的一系列重要参量,例如峰值功率,脉冲能量,脉冲宽度,能量利用率等的解析结果。同数值解的结果比较证明,本文的解析解精确地描述了调 Q 脉冲。通过寻求调 Q 速率方程的解析解可以清楚地分析各有关因素对调 Q 脉冲形成的影响,并有助于优化调 Q 激光器的有关参量<sup>[12]</sup>,为实际设计有效的调 Q 激光器提供具体的途径。

## 2 含 Cr 离子材料的饱和吸收特性

具有优良饱和吸收特性的含 Cr 离子晶体多是含四价铬离子( $\text{Cr}^{4+}$ )。描述其饱和性能可

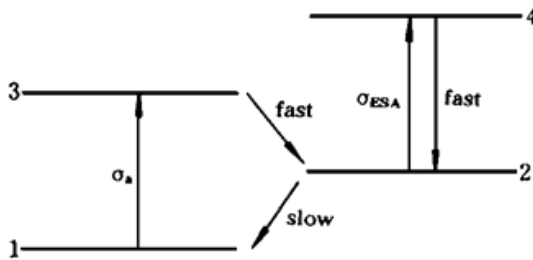


Fig. 1 Energy levels for a solid-state absorber with excited state absorption.  $\sigma_a$  and  $\sigma_{ESA}$  are the ground state and excited state absorption cross section

采用四能级模型(图 1)。其特点之一是存在着明显的激发态吸收(例如:  $\text{Cr}^{4+} \cdot \text{YAG}$ ,  $\sigma_g \sim 3 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$ ,  $\sigma_e \sim 2 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ <sup>[4]</sup>,  $\text{Cr}^{4+} \cdot \text{GSGG}$ ,  $\sigma_g \sim 7 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ ,  $\sigma_e \sim 2.3 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ <sup>[7]</sup>,  $\text{Cr}^{4+} \cdot \text{YSO}$ ,  $\sigma_g \sim 1.5 - 3.9 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ ,  $\sigma_e \sim 0.8 - 2.4 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ <sup>[6]</sup>)。它们的吸收带较宽。虽然由于基质晶体不同导致掺入  $\text{Cr}^{4+}$  离子吸收峰位置不同,但吸收都是宽带的。这类材料的吸收特性还常依赖于被吸收光的偏振状况,不同的偏振光不只引起晶体吸收强度的不同,对有些晶体甚至会引起吸收峰波长的位移<sup>[6]</sup>。另一特点是其饱和的恢复时间较长,达到微秒量级。这主要是

是能级 2 到能级 1 的辐射寿命较长之故(例如  $\text{Cr}^{4+} \cdot \text{YAG}$ ,  $\tau \sim 4 \mu\text{s}$ <sup>[4]</sup>,  $\text{Cr}^{4+} \cdot \text{Mg}_2\text{SiO}_4$ ,  $\tau \sim 3 \mu\text{s}$ <sup>[5]</sup>,  $\text{Cr}^{4+} \cdot \text{YSO}$ ,  $\tau \sim 0.7 \mu\text{s}$ <sup>[8]</sup>)。因此,这类饱和吸收体属于慢恢复饱和吸收体。正因如此,它们的被动调 Q 过程可解析求解。

这类含 Cr 离子的饱和吸收材料还具有高损伤阈值(例如:  $\text{Cr}^{4+} \cdot \text{Mg}_2\text{SiO}_4$ , 损伤阈值达  $2 \times 10^{10} \text{ W/cm}^2$ )<sup>[5]</sup>、高化学稳定、无退化现象的特点。作者之一曾把 Cr, Nd·YAG 作为饱和吸收体用于一台商品 Nd·YAG 激光器进行被动调 Q,在腔内光功率密度达  $10 \text{ MW/cm}^2$  的情况下长时间工作,未见任何可观测的退化现象<sup>[3]</sup>。

当然,这类材料的饱和吸收特性也有不足之处,即饱和时仍有一定的“残存”的吸收,不能完全“漂白”,这可能是由于激发态吸收不易达到饱和之故<sup>[6]</sup>。

## 3 慢恢复饱和吸收体被动调 Q 方程的解析解

饱和吸收体被动调 Q 的理论分析一般基于速率方程<sup>[11]</sup>。包含增益介质反转原子数、饱和吸收介质原子数和腔中光子数的速率方程组,由于各变量相互耦合,无法寻求解析解,一般只好用计算机求数值解。

### 3.1 慢恢复饱和吸收体被动调 Q 速率方程组

对于有激发态吸收的饱和吸收体,速率方程组的形式为<sup>[8]</sup>

$$\frac{dn}{dt} = [K_g N_g - K_a N_a - \beta K_a (N_{a0} - N_a) - 1/\tau]n \quad (1)$$

$$\frac{dN_g}{dt} = R_p - N_g/\tau_g - \gamma K_g N_g n \quad (2)$$

$$\frac{dN_a}{dt} = [N_{a0} - N_a]/\tau_a - K_a N_a n \quad (3)$$

其中  $n$  是腔中的光子数,  $N_g$  是激光介质的反转原子数,  $N_a$  是饱和吸收体基态原子数,  $N_{a0}$  是  $N_a$  的起始值,  $K_g$  和  $K_a$  是对应的耦合系数,  $\beta$  是饱和吸收体激发态吸收因子 ( $\beta < 1$ ),  $\tau$  是腔中的光子寿命,  $R_p$  是泵浦速率,  $\tau_g$  是激光辐射上能级寿命,  $\gamma$  对于三能级激光系统为 2, 对于四能级系统为 1,  $\tau_a$  是饱和吸收体的恢复时间。

(1) 式可以改写成

$$\dot{n}/dt = [K_g N_g - (1 - \beta) K_a N_a - 1/\tau] n \quad (4)$$

这里  $1/\tau' = 1/\tau + \beta K_a N_{a0}$ 。按照一般处理调 Q 过程的做法<sup>[11]</sup>, 在 Q 脉冲形成的这个很短的期间(纳秒或几十纳秒量级), 在方程(2)中可略去  $R_p$  和  $1/\tau_g N_g$  项( $\tau_g$  一般几十到几百微秒量级), 即为

$$\dot{N}_g/dt = -\gamma K_g N_g n \quad (5)$$

对于含 Cr 离子材料这类慢恢复饱和吸收体, 在 Q 脉冲形成期间, 可略去方程(3)中的  $[N_{a0} - N_a]/\tau_a$  项, 将其简化为

$$\dot{N}_a/dt = -K_a N_a n \quad (6)$$

取这样的近似是合理的。作者曾利用文献[8]数值模拟的参数, 分别对方程组(1)、(2)、(3)和取了近似后的方程组(4)、(5)、(6)作数值计算, 计算表明, 甚至对  $\tau_a \sim 0.7 \mu\text{s}$  这种恢复时间不是很慢的情况, 两种结果也吻合得十分好[见图 2]。

方程组(4)、(5)、(6)可进一步写成归一化形式

$$\dot{\phi} = [G - \alpha A - 1] \phi \quad (7)$$

$$\dot{G} = -\gamma G \phi \quad (8)$$

$$\dot{A} = -\delta A \phi \quad (9)$$

其中  $\phi = nK_g\tau$ ,  $G = N_gK_g\tau$ ,  $A = N_aK_g\tau$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{G}$ ,  $\dot{A}$  表示对归一化时间  $\tau = t/\tau$  求微商,  $\delta = K_a/K_g$ ,  $\alpha = \delta(1 - \beta)$ 。方程组(7)、(8)、(9)就是慢恢复饱和吸收体被动调 Q 速率方程组。当  $\delta = 0$  时, 方程组将转化成主动调 Q 的速率方程组<sup>[11]</sup>。

### 3.2 调 Q 判据

遵循文献[11]的做法可得, 在 Q 脉冲形成的初期应有

$$\dot{\phi}/\phi \approx \gamma_{g0} + (\alpha\delta A_0 - \gamma G_0)\phi/\gamma_{g0} + \dots \quad (10)$$

这里  $A_0$ ,  $G_0$  表示 A 和 G 的初值,  $\gamma_{g0} = G_0 - \alpha A_0 - 1$ 。实现好的调 Q 过程需方程(10)右边第二项的系数为正, 因此得下列调 Q 判据

$$A_0/G_0 > \gamma/\alpha\delta \quad (11)$$

按前面 A、G、 $\alpha$ 、 $\delta$  的定义, 可将(11)式改写成与文献[8]、[11]表示形式一致的不等式

$$(2\alpha_a L_a / 2\alpha_g L_g) \times (\sigma_a / \sigma_g) \times (A_g / A_a) > \gamma / (1 - \beta) \quad (12)$$

其中,  $\alpha_a$  和  $L_a$  分别是饱和吸收介质的小信号吸收系数和长度,  $\alpha_g$  和  $L_g$  分别是增益介质的小信号增益系数和长度,  $\sigma_a$  和  $A_a$  分别是饱和吸收介质的基态吸收截面和光束在吸收体处的截面,  $\sigma_g$  和  $A_g$  分别是增益介质的发射截面和光束在增益介质处的截面。(12)式适用于慢恢复饱和

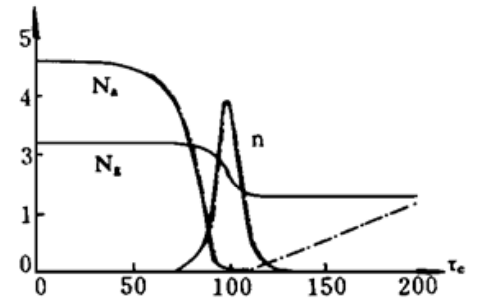


Fig. 2 Results of numerical simulation. Dashed lines: results from equations (1)、(2)、(3). Solid lines: results from equations (4)、(5)、(6). (For convenience,  $n$ ,  $N_g$ ,  $N_a$  are multiplied by  $10^{-16}$ ,  $2 \times 10^{-18}$ ,  $5 \times 10^{-16}$ )

吸收体的被动调  $Q$ , 与文献[11] 中的快饱和吸收体被动调  $Q$  判据不同。(12) 式还反映了激发态吸收对调  $Q$  条件的影响(通过  $\beta$  因子)。

### 3.3 调 $Q$ 重要参量的解析表达式

由慢恢复饱和吸收体被动调  $Q$  速率方程组(7)、(8)、(9) 求有关重要参量, 例如峰值功率、脉冲能量、脉冲宽度、能量利用率等, 基本类似文献[11]、[13] 中对主动调  $Q$  的通行做法。由(8)、(9)式可求出

$$(A/A_0) = (G/G_0)^{\delta\gamma} \quad (13)$$

将结果代入(7)式, 再与(8)式联立可解出

$$\phi - \phi_0 = \frac{1}{\gamma} [G_0 - G - \ln(G_0/G)] - (1 - \beta)A_0[1 - (G_0/G)^{-\delta\gamma}] \quad (14)$$

显然式中第二项反映了饱和吸收体的影响。在脉冲的峰值处,  $\dot{\phi} = 0$ , 因此由(7)可得

$$G_p - \alpha A_0 (G_p/G_0)^{\delta\gamma} = 1 \quad (15)$$

已知初始值  $A_0$ ,  $G_0$  及  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  等系数后, 可求得脉冲峰值处的  $G_p$  值。将其代入(14)式, 可得到脉冲峰值处的  $\phi$

$$\phi_p = \phi_0 + \frac{1}{\gamma} [(G_0 - G_p) - \ln(G_0/G_p)] - (1 - \beta)A_0[1 - (G_0/G_p)^{-\delta\gamma}] \quad (16)$$

$\phi_p$  与腔中的光子数相联系。由  $\phi_p$  可求得峰值功率的表达式:

$$P_p = (\gamma_1/T) h \omega n_p = (\gamma_1/T) h \omega (\phi_p / K_g \tau_c) \quad (17)$$

式中  $n_p$  表示脉冲峰值时腔中的光子数,  $\gamma_1$  为输出镜的透过率,  $T$  为光在腔中来回一周的时间。

再由方程组(7)、(8)、(9) 推导得

$$d\phi = - (1/\gamma) dG + (1 - \beta) dA - \phi d\tau \quad (18)$$

对整个脉冲积分得

$$\phi - \phi_0 = \frac{1}{\gamma} (G_0 - G_f) - (1 - \beta) (A_0 - A_f) - \int \phi d\tau \quad (19)$$

角标“ $f$ ”表示脉冲结束之后。由于  $\dot{\phi} \approx \dot{\phi}_0 \approx 0$ , 因此

$$\int \phi d\tau = \frac{1}{\gamma} (G_0 - G_f) - (1 - \beta) A_0 [1 - (G_0/G_f)^{-\delta\gamma}] \quad (20)$$

脉冲能量可表示为

$$\begin{aligned} E &= \int P dt = \int \frac{\gamma_1}{T} h \omega \frac{\phi}{K_g \tau_c} d\tau \\ &= \frac{\gamma_1 h \omega}{T K_g} \left\{ \frac{1}{\gamma} (G_0 - G_f) - (1 - \beta) A_0 [1 - (G_0/G_f)^{-\delta\gamma}] \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $G_f$  可由下面代数方程求得:

$$G_0 - G_f = \ln(G_0/G_f) + (1 - \beta) A_0 [1 - (G_0/G_f)^{-\delta\gamma}] \quad (22)$$

此方程是由(14)式在脉冲结束之后取值, 并注意到  $\dot{\phi} \approx \dot{\phi}_0 \approx 0$  后得到的。

至于脉冲宽度的表达式, 一般文献中都用  $\tau_p = E/P_p$  这个式子来估算<sup>[11~13]</sup>, 完全不考虑脉冲形状, 误差较大。本文采用在脉冲峰点处级数展开法, 推出了  $\phi(\tau)$  的近似表达式, 再用取半高全宽(FWHM)的方法得到脉冲宽度的较精确的表达式。具体做法如下:

在积分求(13)、(14)式的过程中, 以峰点的  $G_p$ 、 $A_p$ 、 $\phi_p$  作为初值, 可类似得到:

$$\phi = \phi_p + [(G_p - G) - \ln(G_p/G)]/\mathcal{Y} - (1 - \beta)A_p[1 - (G_p/G)^{-\frac{\delta}{\mathcal{Y}}}] \quad (23)$$

代入方程(8)求得:

$$\dot{G} = -\mathcal{Y}G\{\phi_p + [(G_p - G) - \ln(G_p/G)]/\mathcal{Y} - (1 - \beta)A_p[1 - (G_p/G)^{-\frac{\delta}{\mathcal{Y}}}]\} \quad (24)$$

引入新变量  $x$ , 设  $G = G_p e^x$ , 代入上式得

$$\dot{x} = -\mathcal{Y}\phi_p - G_p(1 - e^x) - x + \mathcal{Y}(1 - \beta)A_p(1 - e^{\frac{x\delta}{\mathcal{Y}}}) \quad (25)$$

在峰点附近,  $x$  是小量。将上式中的指数项用级数展开, 对展开式各项作数量估计后, 只保留至二阶项得到

$$\dot{x} = -\mathcal{Y}\phi_p + bx^2 \quad (26)$$

其中  $b = G_p/2 - A_p\delta^2(1 - \beta)/2\mathcal{Y}$ 。积分上式得

$$x(\tau) = -\sqrt{\mathcal{Y}\phi_p/b} \tanh(\sqrt{\mathcal{Y}\phi_p b}\tau) \quad (27)$$

将  $G = G_p e^x$  代入(23)式, 作类似的近似展开, 可得到

$$\phi(\tau) = \phi_p - (b/\mathcal{Y})x^2(\tau) \quad (28)$$

取其半高全宽, 最后得到调 Q 脉冲的宽度表达式

$$\tau_p = \frac{2}{\sqrt{\mathcal{Y}\phi_p b}} \tanh \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.763}{\sqrt{\mathcal{Y}\phi_p b}} \quad (29)$$

该式的精确度很高。利用文献[8]的数值模拟参数, 用(29)式求得的脉冲宽度与数值解比较, 其精确度达到 0.80% (见后面表 1); 而用通常的  $\tau_p = E/P_p$ , 求得的脉冲宽度只有 16.87% 的精度。图 3 给出了由(28)式得到的脉冲形状和数值模拟结果的比较, 二者符合得很好。

调 Q 的另一重要参量是能量利用率, 按通常的定义并考虑到饱和吸收体的影响, 其表示式应为

$$\eta = \{(G_0 - G_f) - (1 - \beta)A_0[1 - (G_0/G_f)^{-\frac{\delta}{\mathcal{Y}}}]\} / G_0 \quad (30)$$

至此, 已经推导出调 Q 脉冲的峰值功率表达式(17)、脉冲能量表达式(21)、脉冲宽度表达式(29)、能量利用率表达式(30)。与直接用数值积分求解速率方程组(1)、(2)、(3)的数值解相比较(见表 1), 可见上述解析表达式精确地描述了调 Q 脉冲。

Table 1. Results of numerical solutions of equations (1)、(2)、(3) and analytical solutions of equations of (7)、(8)、(9) with the parameters in Ref. [8]

results	$G_p$	$\varphi_p$	$P_p$	$E$	$\tau_p$	$\eta$
			( $rth \omega T$ )	( $rth \omega T$ )	(ns)	
numerical solutions	1.00076	0.03461	$3.61 \times 10^{16}$	$1.76 \times 10^9$	41.58	0.4120
analytical solutions	1.000002	0.03491	$3.64 \times 10^{16}$	$1.77 \times 10^9$	41.25	0.4179

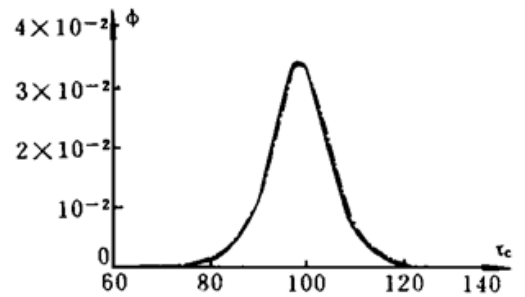


Fig. 3 The comparison between numerical simulation and analytical formulas. Dashed line: the pulse shape of numerical simulation from normalized equations (1)、(2)、(3). Solid line: the pulse shape from equation (28)

**结 论** 由于近年来掺 Cr 离子晶体材料的发展, 一类新型的、具有优良饱和吸收特性的固体被动调 Q 材料, 越来越广泛地应用于各类固体激光器中。基于这类  $Cr^{4+}$  离子晶体大多具有较长的饱和恢复时间, 本文简化了被动调 Q 速率方程组, 推出了能反映激发态吸收效应的慢恢复饱和吸收体被动调 Q 的判据, 以及调 Q 脉冲的峰值功率、脉冲能量、脉冲宽度和能量利

用率等调  $Q$  重要参量的解析表达式。这些解析表达式将有助于这类被动调  $Q$  激光器的设计。上述结果可适用于一切慢恢复饱和吸收体的被动调  $Q$  过程。

### 参 考 文 献

- [1] D. M. Andraskas, C. Kennedy, Tetraivalent chromium solid-state passive  $Q$ -switch for Nd:YAG laser system. O. S. A. Proc. *Advanced Solid-State Lasers*, 1991, **12**: 393~ 397
- [2] I. J. Miller, J. E. Bernard, Experimental investigation of  $\text{Cr}^{4+}$  in YAG as a passive  $Q$ -switch. O. S. A. Proc. *Advanced Solid-State Lasers*, 1992, **13**: 322~ 325
- [3] S. Li, S. Zhou, P. Wang *et al.*, Self-switched diode-end pumped Cr, Nd:YAG laser with polarized output. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(3): 203~ 204
- [4] K. Spariosu, W. Chen R. Stultz, M. Bimbanm, Dual  $Q$  switching and laser action at 1.06 and 1.44  $\mu\text{m}$  in a  $\text{Nd}^{3+}$ :YAG- $\text{Cr}^{4+}$ :YAG oscillator at 300 K. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(10): 814~ 816
- [5] M. I. Demchuck, V. P. Mikhailov, N. I. Zhavornkov *et al.*, Chromium-doped forsterite as a solid-state saturable absorber. *Opt. Lett.*, 1992, **17**(13): 929~ 930
- [6] E. Muini, A. B. Villaredrde, X. X. Zhang *et al.*, Broadband intensity dependent absorption in tetravalent chromium-doped crystals. *Appl. Phys. Lett.*, 1993, **63**(13): 1739~ 1741
- [7] W. Chen, K. Spariosu, R. Stultz *et al.*,  $\text{Cr}^{4+}$ :GSGG saturable absorber  $Q$ -switch for the ruby laser. *Opt. Commun.*, 1993, **104**(1): 71~ 74
- [8] Y. K. Kuo, M. F. Huang, M. Birnbaum, Tunable  $\text{Cr}^{4+}$ :YSO  $Q$ -switched Cr:LiCaF laser. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1995, **31**(4): 657~ 663
- [9] S. Zhou, K. K. Lee, S. Li, Monolithic self- $Q$ -switched Cr, Nd:YAG laser. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(7): 511~ 513
- [10] Y. C. Chen, S. Li, K. K. Lee *et al.*, Self-stabilized single-longitudinal-mode operation in a self- $Q$ -switched Cr, Nd:YAG laser. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(17): 1418~ 1419
- [11] A. E. Siegman, *Lasers*, 1st ed., Mill Valley, CA Univ. Sci. Books, 1986: 1024~ 1026
- [12] I. J. Zanhowski, P. L. Kelley, Optimization of  $Q$ -switched laser. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1991, **27**(9): 2220~ 2225
- [13] O. Svelto, (translated from Italian and edited by D. C. Hanna), *Principles of Lasers*, 2nd ed., New York, Plenum, 1989, 183~ 186

## Analytical Solution for Passive $Q$ -Switching with Cr-Ion Doped Saturable Absorber

Wu Nianle    Lu Yajun    Lu Xinghua    Li Jiaqiang    Li Shiqun

(Department of Modern Applied Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

(Received 8 December 1995; revised 28 March 1996)

**Abstract** The behavior of passive  $Q$ -switching with a slow saturable absorber is analyzed. From the simplified rate equations for passive  $Q$ -switching, the criteria for passive  $Q$ -switching using a saturable long recovery time and excited state absorption, and the analytical formulas for the peak power, pulse energy, pulse width and energy extraction efficiency are derived. The general results have applications in the optimal design of such passive  $Q$ -switched lasers.

**Key words** saturable absorber, passive  $Q$ -switching, excited state absorption.