

# 基于朗伯定律重建光学三角法 测位移原理公式\*

王少清\* \* 庄葆华 张文伟

(天津大学精密仪器工程系, 天津 300072)

**摘 要** 利用朗伯定律重建了光学三角法测位移的原理公式。与用几何光学原理建立的公式进行了比较。利用新公式对影响光学三角法测位移精度的主要误差因素进行了深入的分析, 给出了实验结果。并提出了减小和校正误差的方法。

**关键词** 光学三角法, 位移测量, 坐标测量。

## 1 引 言

高精度、小型化的激光三角位移计在三坐标测量等方面的应用日益受到重视<sup>[1, 2]</sup>。在激光三角位移计的研制、开发与使用中, 发现入射光斑的尺寸、物表面的光学性能和倾斜等<sup>[1, 3]</sup>因素对测量精度影响很大。由于经典的光学三角法测位移原理公式是利用几何光学理论建立的, 与上述因素无关。故无法用其进行有关的误差分析, 只能从实验中摸索误差变化规律和探索减小与校正误差的方法。Kazuo Yamazami 在实验所得经验公式的基础上提出了多光纤探头同时测量物面倾斜角和物体位移的方法<sup>[4]</sup>, 但由于所用经验公式的局限性, 使得该方法的适用范围受到限制。本文拟利用朗伯定律重建光学三角法测位移的原理公式, 并据此对影响测量精度的主要误差因素进行深入的分析。进而提出减小和校正误差的方法。

## 2 基于几何光学理论的光三角法测位移原理

常见的激光三角位移计的光路布置如图 1 所示。半导体激光器 LD 发出的光经透镜 L<sub>1</sub> 会聚后垂直入射到被测物表面上的 O 点。据几何光学理论, 被照明的 O 点作为物光点经透镜 L<sub>2</sub> 成像于线型光电位置检测元件 PSD 的光敏面上, 产生像光点。当被测物体发生位移  $x$  时, 物光点也发生位移  $x$ , PSD 上的像光点产生位移  $x'$ 。通常为安装方便使 PSD 平面与 L<sub>2</sub> 的光轴垂直。利用薄透镜成像公式和图 1 中各量的几何关系易推得  $x$  和  $x'$  的关系为

$$x = \frac{ax'}{b \sin \beta + x' \cos \beta} \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金资助项目。

\* \* 山东建筑材料工业学院物理教研室(250022), 天津大学精密仪器工程系进修教师。

收稿日期: 1996 年 3 月 16 日; 收到修改稿日期: 1996 年 8 月 12 日

由于像光点的位移与 PSD 的差动归一化光电输出成正比, 故测得 PSD 的光电输出即可由(1)式求得物体的位移。

### 3 基于朗伯定律的光学三角法测位移原理

根据表面光散射理论, 被激光照明的 O 点将产生散射光场。透镜 L<sub>2</sub> 将入射到其上的散射光会聚到 PSD 的光敏面上形成像光斑。像光斑有一定的大小且其光强分布是不均匀的。PSD 的光电输出由像光斑的等效光能中心(相当于质量不均匀分布平面的质心)决定。被测物体的移动将使散射光场相对 L<sub>2</sub> 的分布发生变化, PSD 上的像光斑及其光能中心也发生相应的移动, 引起 PSD 的光电输出变化。因此, 下面需建立的是 PSD 上像光斑的等效光能中心与被测物体位移间的关系式。

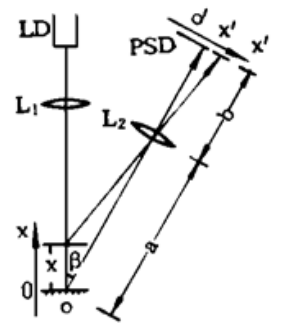
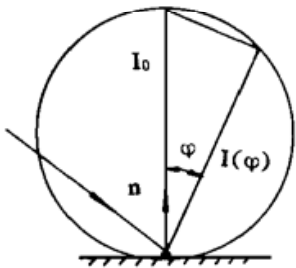


Fig. 1 Schematic diagram of optical triangulation for displacement measurement

#### 3.1 三个基本假设

假设 1 理想漫散射无吸收模型

激光在物体表面的散射是非常复杂的。与入射光角度、散射体的复折射率及物表面的粗糙度等因素有关<sup>[5]</sup>。设被测物表面为理想的漫散射面, 散射体为不透明的无吸收介质<sup>[6]</sup>。这样, 根据朗伯(Lambert)定律<sup>[7]</sup>, 散射光场的光强分布为



$$I = I_0 \cos \varphi \tag{2}$$

如图 2 所示, 其中  $\varphi$  为散射光方向与物面法线间的夹角,  $I$  为  $\varphi$  方向单位立体角内的散射光功率,  $I_0$  为法线方向的  $I$  值。

假设 2 被测物位移  $x$  与接收透镜半径  $R$  远小于光路的几何尺寸  $a$

在精密位移测量中, 位移值通常小于数毫米。小型化的激光三角位移计的接收透镜 L<sub>2</sub> 的半径也约为几毫米。而光路参数  $a$  一般为数十毫米。故在推导中仅取一级近似, 舍去  $x/a$  和  $R/a$  的高阶项。

Fig. 2 Schematic diagram of Lambertain law

假设 3 物面法线的倾斜仅发生在接收面内

由入射光与接收透镜 L<sub>2</sub> 的主光轴构成的平面为接收面。实验发现, 被测物面法线与入射光线间夹角的变化(简称为物面的倾斜)对测量结果有很大的影响, 此影响以发生在接收面内的倾斜为主。故为推导简明起见, 设物面倾斜发生在接收面内。以  $\alpha$  表示物面法线与入射光方向间的夹角。并设物面法线位于入射光线右侧时  $\alpha > 0$ ; 反之,  $\alpha < 0$ 。

#### 3.2 公式的建立

为后面的推导中简明起见, 先将各物理量的符号及其意义说明如下(参见图 3):  $a$ 、 $b$ 、 $\beta$  为光三角结构参数,  $R$  为接收透镜 L<sub>2</sub> 的通光半径,  $\alpha$  为物面倾角,  $r$  为由物光点到接收透镜中心的距离,  $n$  为被测物表面的法线,  $\theta_0$  为  $r$  与  $n$  的夹角,  $\Delta\theta$  为接收透镜孔径对物光点的半张角。

如图 4 所示, 在接收透镜上取与接收面垂直的条形面元  $dS$ 。由于透镜很小, 故可认为此面元上的散射光强与其中心处相同。那么,  $dS$  接收的光功率为

$$dP = I_0 \cos (\theta_0 - \theta) d\Omega$$

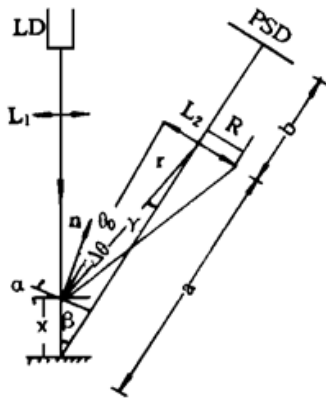


Fig. 3 Reference diagram of re-constructing the principle formula of optical triangulation for displacement measurement

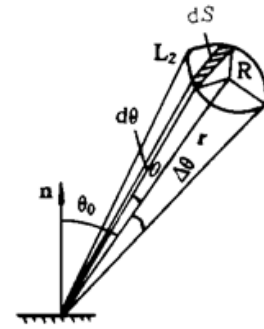


Fig. 4 Reference diagram of the area element dS

其中  $d\Omega$  为  $dS$  对物光点所张的立体角。利用图 4 可推得

$$d\Omega = dS / (r / \cos \theta)^2 = 2 \sqrt{R^2 - r^2 \tan^2 \theta} \frac{\cos \theta}{r} d\theta$$

$$dP = 2I_0 \cos(\theta_0 - \theta) \sqrt{R^2 - r^2 \tan^2 \theta} \frac{\cos \theta}{r} d\theta \tag{3}$$

由图 3 知，在一级近似下有

$$r = a - x \cos \beta \tag{4}$$

将(3)式对  $L_2$  积分即可得到接收透镜接收到的光功率  $P$ 。因为  $\theta$  角很小，且  $r \gg R$ ，故推导中可作如下近似： $\cos^2 \theta = \cos \theta$ ， $1 - (r/R)^2 \sin^2 \theta = 1$ ， $\sin \theta = \theta$ ， $(R/r) \sin^{-1}[(r/R) \sin \theta] = \theta$  和  $\sin \Delta\theta = \tan \Delta\theta = R/r$  及  $\theta_0 = \beta - \alpha + \gamma = \beta - \alpha$ 。如此可得

$$P = I_0 \frac{\pi R^2}{a^2} (1 + 2 \frac{x}{a} - \cos \beta) \cos(\beta - \alpha) \tag{5}$$

此光功率全部会聚到 PSD 上，决定了 PSD 光电信号的强弱。

若在某角度  $\theta = \theta_1$  处将接收透镜垂直于接收面分成两部分，使得两部分的接收光功率相等。则  $\theta_1$  即为接收透镜接收到的散射光锥中光能中心线的角位置，其值由下面的积分方程决定

$$\int_{\Delta\theta}^{\theta_1} dP = \int_{\theta_1}^{\Delta\theta} dP$$

经同上的近似处理，完成积分则得到

$$\theta_1 = \frac{R^2}{a^2} (1 + 2 \frac{x}{a} \cos \beta) \tan(\beta - \alpha) \tag{6}$$

据几何光学原理可求得此光能中心线在 PSD 光敏面上的投射点坐标  $x''$  为

$$x'' = \frac{bx \sin \beta}{a - x \cos \beta} - \frac{bx \sin \beta}{a} \theta_1$$

将(6)式代入得

$$x'' = \frac{bx \sin \beta}{a - x \cos \beta} - \frac{bR^2 x \sin \beta}{a^3} (1 + 2 \frac{x}{a} \cos \beta) \tan(\beta - \alpha) \tag{7}$$

$x''$  即为 PSD 上像光斑的等效光能中心位置，PSD 的差动归一化输出由  $x''$  决定。因此，(7)式即为基于朗伯定律重建的光学三角法测位移原理公式。

## 4 两个原理公式的比较

从(1)式中解出  $x'$ , 有

$$x' = \frac{bx \sin \beta}{a - x \cos \beta} \quad (8)$$

这样(7)式可改写成

$$x'' = x' - \frac{bR^2x \sin \beta}{a^3} (1 + 2 \frac{x}{a} \cos \beta) \operatorname{tg} (\beta - \alpha) \quad (9)$$

(9)式表明, 基于朗伯定律的(7)式包含基于几何光学理论的(1)式在内, (1)式是(7)式在  $\alpha = \beta$  时的特殊情况。当  $\alpha = \beta$  时, 物面法线恰与  $L_2$  的主光轴一致, PSD 上像光斑的几何中心与其等效光能中心重合。所以两种理论预计的结果相同。但当  $\alpha \neq \beta$  时, 两者将产生偏差。因此, 在一般情况下必须用(7)式代替(1)式。

## 5 误差分析

### 5.1 入射光斑尺寸和物面反光性能对位移测量的影响

实验发现, 入射光功率一定时, 入射光斑的大小对测量精度有明显的影响。一般说来, 在较小的入射光斑下将获得精度较高的测量结果。(5)式表明, PSD 的接收光功率与  $I$  成正比。当入射光斑有一定大小时,  $I_0$  应与入射光斑直径的平方成反比。因此, 当入射光斑增大时, PSD 的接收光功率将减小, 光电信号减弱, 信噪比降低, 信号波动增大, 使测量精度降低。(5)式给出了提高 PSD 接收光功率的几个途径。如增大接收透镜的半径  $R$ , 减小光路参数  $a$  等。据(5)式还可知, 被测物表面反光性能较差时 PSD 的接收光功率也将较小。所以在测量此类物体的位移时, 应采取适当的方法(如表面涂漫反射性能较好的涂料)增强表面散射能力, 以提高测量精度。

### 5.2 被测物面倾斜对位移测量的影响

实验发现, 被测物面的倾斜对位移测量的影响很大。物面倾斜产生测量误差的主要原因有两点: 1) 物面倾斜将使 PSD 的接收光功率发生变化; 2) 将使 PSD 上像光斑的等效光能中心发生移动。利用(5)、(7)两式可对此误差进行定量的分析。

#### 5.2.1 被测物面倾斜对 PSD 接收光功率的影响

由(5)式知, PSD 的接收光功率  $P$  与物面倾斜角  $\alpha$  及物体位移  $x$  有关。其变化规律可概括为: 当倾斜角  $\alpha$  一定时,  $P$  随位移  $x$  的增大而增大; 当位移  $x$  一定时,  $P$  随物面法线与接收透镜  $L_2$  光轴之间偏离程度的增大, 即  $|\beta - \alpha|$  的增大而减小。

图 5 示出按(5)式所做的计算机模拟结果(虚线)与实测结果。可见实验结果反映出的 PSD 的接收光功率随物面倾斜角和被测位移的变化规律与(5)式的理论预计是一致的。

#### 5.2.2 被测物面倾斜对 PSD 上等效光能中心位置的影响

通常激光三角位移计的标定是在入射光束垂直被测物表面, 即  $\alpha = 0$  的情况下进行的。此时据(7)式知, PSD 上像光斑的等效光能中心的位置为

$$x_0'' = \frac{bx \sin \beta}{a - x \cos \beta} - \frac{bR^2x \sin \beta}{a^3} (1 + 2 \frac{x}{a} \cos \beta) \operatorname{tg} \beta \quad (10)$$

如实测时物面倾斜了  $\alpha$  角, 则等效光能中心位置的偏移量为  $\Delta x'' = x'' - x_0''$ , 即

$$\Delta x'' = \frac{bR^2x \sin \beta}{a^3} (1 + 2 \frac{x}{a} \cos \beta) [\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} (\beta - \alpha)] \quad (11)$$

据 PSD 平面与物平面间的垂轴放大关系可知, 该偏移量造成的物体位移测量偏差为

$$\Delta x = x \frac{R^2}{a^2} (1 + 2 \frac{x}{a} \cos \beta) [\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} (\beta - \alpha)] \quad (12)$$

可见物面倾斜使 PSD 上像光斑的等效光能中心位置偏移将产生倾斜误差。据(12)式可将倾斜误差的变化规律概括为: 倾斜误差随  $|x|$  和  $|\alpha|$  的增大而增大。图 6 示出按(12)式所做的计算机模拟结果(虚线)与实测结果。由图 6 可见, 实验反映出的倾斜误差的变化规律与理论预计基本上是一致的。由图 5 和图 6 也可看出, 理论预计与实验结果间也有一定的误差。这主要是由于实测物体并非理想的朗伯体所致, 并不影响本文的主要结论。实验表明, 倾斜误差是不容忽视的。尤其是在复杂形状物体的形貌测量中, 物面倾斜情况变化很大, 必须对倾斜误差加以有效的校正。

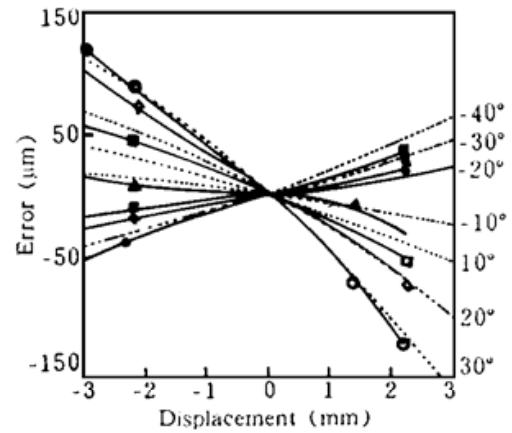
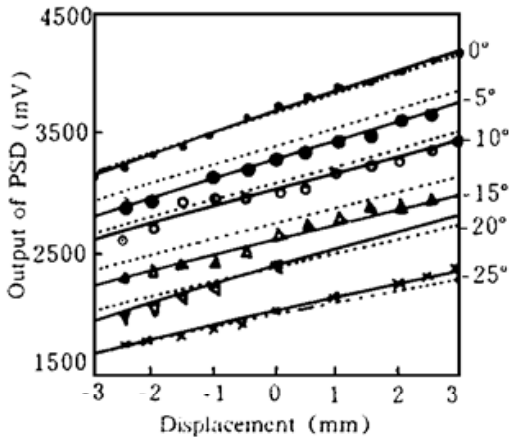


Fig. 5 The curves of received power of PSD at different inclination angles

Fig. 6 The curves of displacement measurement error at different inclination angles

### 5.3 倾斜误差的校正方法

据(12)式可知, 减小接收透镜的半径  $R$  或加大光路参数  $a$  均可减小倾斜误差。但这样会使 PSD 的接收光功率减小, 降低信噪比, 于测量不利。利用预先做好的各种倾斜角下的标定曲线可有效地校正倾斜误差。但要求实测时知道每个位移点对应的物面倾角。由(5)、(7)两式知, PSD 的输出与待测位移  $x$  和物面倾角  $\alpha$  均有关, 故用一个单接收的激光三角位移计无法既测得位移, 同时又测得物面倾角。文献[4]所提出的多光纤探测法可达到这一目的, 但实现起来较复杂, 需对测量装置做很大的改动。作者提出如图 7 所示的双接收式激光三角位移测量法, 只需对原测量装置稍加改动即可实现位移与倾角的同时测量。图中  $L_{2a}$  和  $PSD_a$  与  $L_{2b}$  和  $PSD_b$  相对入射光线构成两套对称的接收装置。当被测物面法线相对  $PSD_a$  倾斜  $\alpha$  角时, 相对  $PSD_b$  的倾斜角为  $-\alpha$ 。据(5)式, 此时两个 PSD 的接收光功率分别为

$$P_a = I_0 \frac{\pi R^2}{a^2} (1 + 2 \frac{x}{a} - \cos \beta) \cos (\beta - \alpha) \quad (13)$$

$$P_b = I_0 \frac{\pi R^2}{a^2} (1 + 2 \frac{x}{a} - \cos \beta) \cos (\beta + \alpha) \quad (14)$$

利用两式可得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_a - P_b}{P_a + P_b} \operatorname{ctg} \beta \quad (15)$$

这样, 据两个 PSD 的差动规一化光电输出即可求得物面的倾斜角, 进而实现对倾斜误差的校正。表 1 给出了利用双三角接收法测量物面倾斜角的初步实验结果。表中第一行为给定的倾斜角, 第一列为给定的位移值; 其余为各倾斜角在不同位移下的测量值。测量结果有一定程

度的分散,可用方差 $\sigma$ 度量。产生测量误差的原因很多。对(13)与(14)两式分析可知,两套接收系统相对于入射光轴不完全对称是主要因素。计算机模拟分析表明,当不对称度在 $\pm 1.5^\circ$ ,位移量为 $\pm 3$  mm,倾斜角为 $\pm 40^\circ$ 时,可造成约 $\pm 1.5^\circ$ 的偏差。若事先标定出物面倾斜角与两个 PSD 的差动归一化输出之间的关系,则可提高测量精度。

Table 1. The measurement results of the inclination angles

$x$ (mm)	$-40^\circ$	$-30^\circ$	$-20^\circ$	$-10^\circ$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
-3.00	-41.8	-31.8	-21.7	-12.7	0.9	10.1	22.2	31.0	38.9
-2.00	-39.8	-30.9	-18.6	-10.8	1.0	9.5	20.5	29.0	37.9
-1.00	-38.5	-30.7	-19.7	-12.4	0.9	8.3	18.2	28.0	39.8
0.00	-41.1	-31.6	-20.9	-11.9	0.9	8.1	18.7	28.3	38.6
1.00	-40.5	-31.2	-18.7	-12.8	-1.7	8.2	19.2	31.7	37.6
2.00	-38.9	-30.5	-21.8	-11.4	1.1	10.5	22.1	30.0	38.8
3.00	-39.3	-32.3	-22.4	-12.5	-1.8	9.8	21.2	29.5	39.5
$\bar{\alpha}$	-40.0	-31.3	-20.5	-12.1	0.19	9.21	20.3	29.6	38.7
$\sigma$	1.20	0.65	1.55	0.74	1.32	1.00	1.63	1.36	0.79

利用双接收测头测得的倾斜角信息,据前述理论对有倾斜情况下的位移测量值进行修正,可以明显地提高测量精度。图 8 示出了修正后残留的测量误差。在被测物体位移量为 $\pm 3$  mm,倾斜角为 $\pm 40^\circ$ 的范围内,残留误差在 $\pm 0.04$  mm 之内。测量精度比未修正时提高了两倍。如利用事先标定的方法,可进一步提高测量精度。

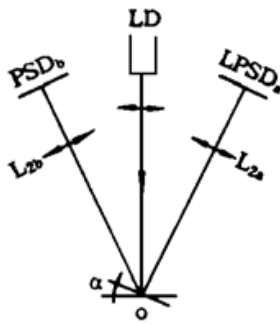


Fig. 7 Schematic diagram of the double-optical-triangulation measurement system

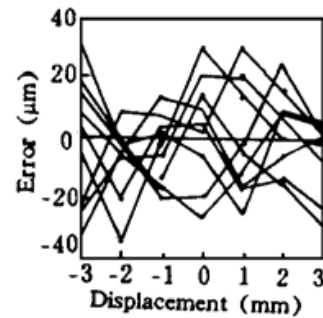


Fig. 8 Experimental results of the displacement measurement error distribution after error correction

**结 论** 利用朗伯定律重建了光学三角法测位移的原理公式。证明了基于几何光学理论的光学三角法测位移原理公式是其一种特殊情况。理论与实验均表明,利用重建的公式可以对影响光学三角法位移测量精度的主要误差进行深入的分析,找到有效的误差校正方法。实验表明,重建的原理公式对提高光学三角法位移测量精度具有理论上的指导意义和实用价值。

### 参 考 文 献

- [1] Kuang-Chao Fan, Kuang-Pu Wen, Non-contact automatic measurement of free-form surface profiles on CNC machines. *Proc. SPIE*, 1993, **2101**: 949~ 958
- [2] Warren Stevenson, The use of laser triangulation probes in coordinate measuring machines for part tol-

- erance inspection and reverse engineering. *Proc. SPIE*, 1992, **1812**: 406~ 416
- [3] Michael Buzinski, Alan Levine, Warren H. Stevenson, Laser triangulation range sensors. A study of performance limitations. *J. Laser Applications*. 1992, **4**(1): 29~ 36
- [4] Kauzo Yamazaki, Kee Sein Lee. Non-contact probe for continuous measurement of surface inclination and position using dynamic irradiation of light beam. *Annals of CIRP*, 1993, **42**(1): 585~ 588
- [5] P. Beckmann, A. Spizzichino, *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surface*. London, Pergamon Press, 1963: 17~ 67
- [6] 三好隆志等, 三次元自由曲面の非接触形状測定センタの開発研究(第一報). *JSPE*, 1992, **58**(11): 1886
- [7] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, (Sixth edition). New York, Pergamon Press, 1980: 182

## Rebuilding Principle Formula of Optical Triangulation Method of Displacement Measurement in View of the Lambert' Theory

Wang Shaoqing      Zhuang Baohua      Zhang Wenwei  
(Department of Precision Instruments, Tianjin University, Tianjin 300072)

(Received 16 March 1996; revised 12 August 1996)

**Abstract** In view of the Lambert' theory, the authors have rebuilt the principle formula of optical triangulation method for displacement measurement. Comparison has been made between the new formula and the old formula built on geometric optics. Using the new formula, analysis of the principle factors which affect the displacement measurement precision of optical triangulation method has been carried out. The experimental results has been reported. The methods has been suggested for decreasing and coorrecting the errors.

**Key words** optical triangulation method, displacement measurement, coordinate measurement.