

对流湍流池 Fried 相干长度的光学结构*

张 骏 曾宗泳 龚知本

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031)

摘 要 利用不同的方法, 测量并比较了用于自适应光学补偿实验的对流湍流池的相干长度。给出到达角起伏谱和起伏方差的概率分布。结果表明: 在对流湍流池中, 光束的到达角起伏谱满足“ $-8/3$ ”幂。由于相位起伏服从正态分布, 因此到达角起伏的方差呈 χ^2 分布。到达角起伏在水平和垂直方向上的谱完全一致表明了湍流池湍流的各向同性特征。相干长度与对流湍流池上下温差的实验结果, 符合以往对流湍流池的流体力学和热力学相似关系。

关键词 Fried 相干长度, 对流湍流池, 到达角起伏谱。

1 引 言

对流湍流是由上面冷却下面加热的平行平板间产生的热力湍流, 工作介质为水。对流湍流池用于激光通过湍流大气的模拟实验研究, 其优点不仅是湍流强度易于控制, 主要在于湍流统计特性的平稳性和完全的可重复性。模拟湍流大气的最基本条件是湍流谱或者结构, 以及湍流量的概率分布特征。本文从湍流池的光学湍流量的测量结果即到达角起伏的测量结果分析证明: 湍流池的湍流结构和实际大气湍流的特征是相似的, 即有较宽的惯性区, 到达角起伏完全服从正态分布。因此用这样的湍流池来进行自适应光学补偿实验与各种传输工程的实验, 能够得到比大气中的实验理想得多的实验结果, 有助于解决理论和实验的相互验证问题。

和过去对流湍流池研究^[7~9]不同, 作者选择了光学湍流量即相干长度来分析湍流池的特征。由于自适应光学主要是处理相位扰动, 而波前畸变与相位扰动成正比, 因此对流湍流池相位扰动的统计特性是本文研究的重点。准确全面地描述对流湍流相干长度的光学结构, 是开展自适应光学补偿效率研究及其它光传输研究必不可少的工作和起始点。通过光学湍流的研究反过来又可进一步了解这种对流湍流的结构特征, 因此也是研究湍流本身的一种方法。

2 到达角起伏测量

平行光通过湍流介质的到达角起伏方差^[2]

$$\langle \alpha^2 \rangle = 2.91D^{-2} \int_0^L C_n^2(\eta) d\eta \quad (1)$$

* 国家高技术 863 资助项目。

收稿日期: 1996 年 1 月 6 日

式中: D 是望远镜的直径。 C_n^2 为折射率结构常数, 积分沿光路进行, L 为光程长。到达角起伏方差和 Fried 相干长度^[1, 3]有如下关系

$$r_0 = 3.18 D^{-1} k^{-1} \langle \alpha^2 \rangle^{-1/5} \quad (2)$$

其中: $k = 2\pi/\lambda$, λ 为波长。因此可采用到达角起伏来得到相干长度。

图 1 是用四象限探测器测量激光通过模拟湍流池到达角起伏的实验装置。当入射平行光聚焦于焦距为 f_1 的焦平面上, 在湍流不太强的情况下, 形成一个大小接近埃里斑的圆形光斑, 直径约为 1 mm, 四象限的感光面直径约为 2 mm, 因此能够把测量误差减小到最小^[4]。根据光斑在平面上的位置, 就可确定光束的到达角起伏^[4, 5]。光电流的大小同照射光斑的面积成正比, 设四象限的光斑面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 , 则计算光斑中心的偏移量为

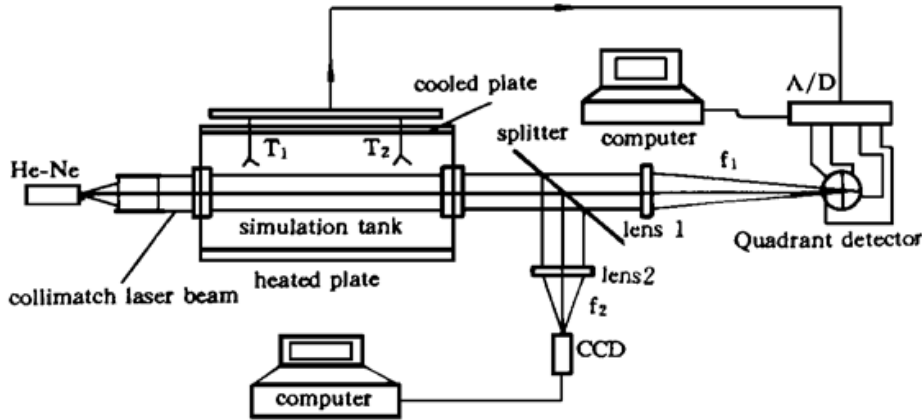


Fig. 1 Schematic illustration of measuring fried's coherence length apparatus

$$x = [(\pi r^2 - 8Lr + 4L^2)/4(r - L)]x_1 \quad (3)$$

$$y = [(\pi r^2 - 8Lr + 4L^2)/4(r - L)]y_1 \quad (4)$$

其中:

$$x_1 = (s_1 + s_4 - s_3 - s_2)/(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) \quad (5)$$

$$y_1 = (s_1 + s_2 - s_3 - s_4)/(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) \quad (6)$$

r 为光斑的半径, 设四象限中间沟槽的宽度为 $2L$, 且假定光斑是均匀的。

根据到达角的定义^[2], 到达角可写为

$$\alpha = (x_i^2 + y_i^2)^{1/2}/f_1 \quad (7)$$

其中: f_1 为物镜的焦距($f_1 = 2.75$ m, $D = 20$ mm), 故到达角起伏的方差为

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \quad (8)$$

在测试中, 由于信号很强, 而电子回路噪声、背景噪声、四象限检测噪声相对很弱, 因此信噪比很大(一般大于 50 dB)。由四象限探测出的信号, 经 A/D 输入计算机, 可计算出到达角起伏。还利用作者研制的电阻温度计^[6]配上 Dantec 公司的热膜探头同时测量 r_0 , 并和到达角起伏的测量结果进行比较。

3 温度脉动法测量相干长度

由于水介质的导热系数远大于空气, 要获得均匀及宽惯性区的湍流比较困难, 作者利用平板均匀加热和冷却的湍流池, 其长度为 2.0 m, 高和宽各为 0.4 m, 大小和面积与 Bissonette^[7]的一样, 但 Bissonette^[7]的外尺度仅有 20 mm。而本文的大致为 100 mm, 能够满足

光传输实验的要求,而且具有较好的均匀性,即中间 70% 以上区域内的湍流强度不变,这就使得由温度脉动测量计算光学湍流强度、相干长度或闪烁强度、等晕角等,能够得到较为可靠的结果。下文将简单介绍使用 C_n^2 计算相干长度的方法,然后和光学方法比较并给出计算结果。关于湍流池流体力学的性能将另文给出。

湍流强度用温度结构常数来表示,其定义为

$$C_t^2 = D(d) / d^{5/3} \quad (9)$$

$$D(d) = \langle [t(r+d) - t(r)]^2 \rangle \quad (10)$$

式中 $t(r)$ 表示空间点 r 处的温度, r 为空间坐标, d 为两测点距离。折射率结构常数 C_n^2 和温度结构常数 C_t^2 有如下关系:

$$C_n^2 = K C_t^2 \quad (11)$$

常数 K 由下述方法求出。水的折射率 n 和密度 ρ 以及温度 t 有如下近似关系

$$n(t_1) = \frac{\rho(t_1)}{\rho(t_2)} [n(t_2) - 1] + 1 \quad (12)$$

写成微分形式为

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(n-1)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = (n-1)\alpha \quad (13)$$

α 为水的膨胀系数,密度 $\rho = 1$ 。因此

$$C_n^2 = [(n-1)\alpha]^2 C_t^2 \quad (14)$$

由化学常用表查出不同温度下的 α 值和 15°C 时的折射率 n , 利用式(9)、(10)、(12)、(14) 即可算出 C_n^2 来。

测出湍流中一点的 C_n^2 , 按照光路中 C_n^2 的分布, 可得到 $\sum_i C_n^2(L_i) \Delta L_i$ 的值。电阻温度计的噪声为 0.005°C , 折算成 C_n^2 为 $1.0 \times 10^{-12} \text{ m}^{-3/2}$, $r_0 \sim 70 \text{ mm}$ 。采样速率为 100 Hz , 采样时间 4 min 。探头位于离壁 0.5 m 和中轴上面 10 cm 处, 在此取 $d = 4.5 \text{ cm}$ 。

4 实验结果与分析

图 2 给出了脉动和到达角起伏两种方法在不同湍流强度下同时测量 r_0 的结果, 温度测量方法测量的是空间一点的温度起伏, 测量时间 4 min 。而到达角起伏由沿光路的温度起伏而定, 测量时间 10 sec , 因此在统计含义上是有区别的。从图中可知两种方法测量得到的 r_0 有很好的相关性, 相关系数为 0.95 , 相对离散 18% 。这里要着重说明的是: 这个离散并不是说明系统不稳定。对于一个平稳各态历经的随机过程, 测量值将随测量时间 T 增加而趋近于平均值^[11], 其起伏大小可由下式估计

$$\delta^2 = \frac{2}{T} \times \int_0^\infty R d\tau \quad (15)$$

式中: R 为被测起伏量的自相关, T 为被测量平均时间。当平均时间延长时, 离散 δ 将减小。图 3 所示结果充分地证实这一点。图中 C_n^2 的平均时间延长到 15 min , 到达角起伏为同时间的十组数据之平均值。图中清楚表明: 这种离散程度大大减小, 进一步说明了两种方法的一致性, 也说明湍流强度平稳性很好。

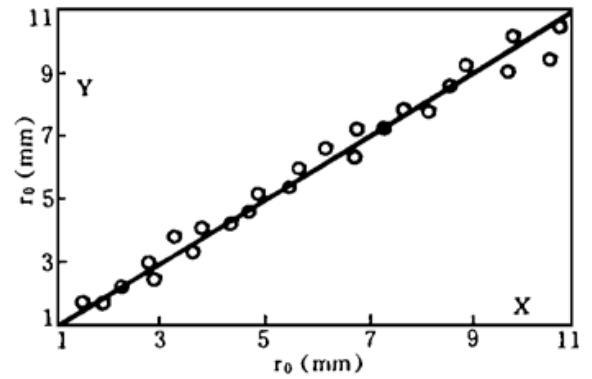
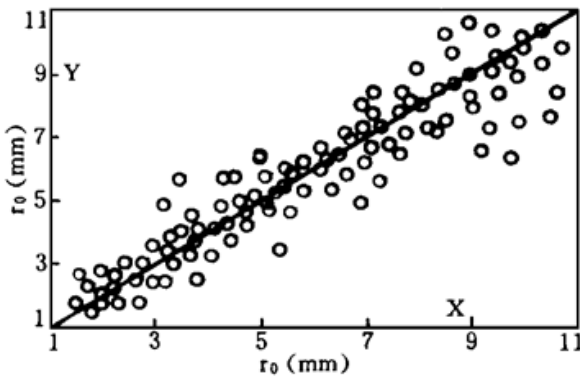


Fig. 2 Fried's Coherence Length measured at the convective turbulent tank (X axis: calculated by structure function of temperature, Y axis: calculated by arrival-angle fluctuations)

Fig. 3 The average of 15 minutes for Fried's Coherence Length (X axis: calculated by structure function of temperature, Y axis: calculated by arrival-angle fluctuations)

图 4 给出了 r_0 和湍流池加热与冷却面温差 ΔT 的关系。横坐标为温差 $\Delta T(^{\circ}\text{C})$ ，纵坐标为 $r_0(\text{m})$ 。从图中可得到一条较为满意的拟合曲线，令

$$r_0 = A / \Delta T^B \tag{16}$$

实验值的拟合结果为 $A = 0.0445$, $B = 0.91$, 相关系数为 0.98。分析及实验的结果都证明: r_0 在 5~ 22 mm 之间, 温差大小可以很好地反映 r_0 。

另外, 利用文献[8]、[9]所做的工作, 可导出湍流池相干长度与温差的相似关系。即:

$$\sigma_T = 0.38R_\alpha^{-0.11}\Delta T \tag{17}$$

可写成:

$$\sigma_T \propto R_\alpha^{-0.11}\Delta T \tag{18}$$

$$R_\alpha = (g/T) (\Delta T h^3 / \nu \chi) \tag{19}$$

式中 R_α 为瑞利数, h 为平板间距离, ν 为动力粘性系数, χ 为导热系数, T 为介质温度, g 为重力加速度。在平均温度变化不大的情况下,

$$C_T^2 \propto \sigma_T^2 / L_0^{\text{湍}} \tag{20}$$

$$r_0 \propto (C_T^2)^{-\text{湍}} \tag{21}$$

这里 L_0 为湍流外尺度。因此

$$r_0 \propto (\Delta T^{0.89 \times 2})^{-(3/5)} = 1 / \Delta T^{1.068} \tag{22}$$

比较(22)式和(16)式发现: 实验结果与相似关系很好的吻合, 这进一步说明实验结果是正确的, 因而可直接利用温差来估算相干长度。利用温差与相干长度的实验结果和相似关系及(20)式, 可得出一条重要的推论: 湍流池的外尺度不随湍流强度变化。如果 $L_0 \neq$ 常数, 将导致 C_T^2 和 σ_T^2 不成正比, 因而得不到(16)式或图 4 的实验结果。

测量结果表明: 到达角起伏服从正态分布, 由于湍流池湍流是平稳的(即存在一个稳定的方差值), 因此到达角起伏方差应服从 χ^2 分布。设 $Y_i = (X_i - a) / \sigma (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\chi^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 / \sigma^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2$ 。因 X_i 服从 $N(a, \sigma^2)$ 分布, 故 Y_i 服从分布 $N(0, 1)$ 。 χ^2 的概率密度函数^[10]

$$P(\chi^2) = \exp(-\chi^2/2) \cdot (\chi^2)^{(n/2-1)} / 2^{(n/2)} \Gamma(n/2), \quad \chi^2 \geq 0 \tag{23}$$

其中: $\Gamma(n/2)$ 为 gamma 函数, n 为自由度, 图 5 给出了到达角起伏方差的 χ^2 分布。图 6 示出整个实验中 2060 组相干长度的统计分布。其中: $\bar{r}_0 = 8.46 \text{ mm}$ 。根据到达角起伏方差的 χ^2 分布, 可得到对流湍流池中 Fried 相干长度的分布函数

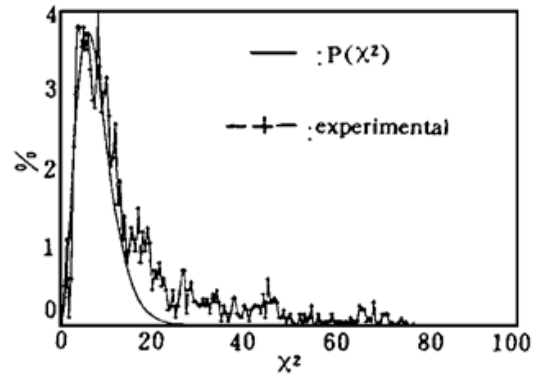
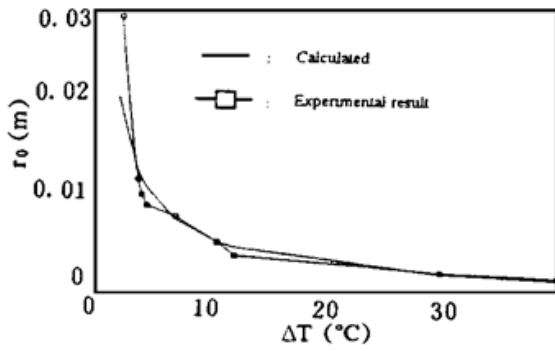


Fig. 4 The relation of Coherence Length and the temperature difference of the convective turbulent tank

Fig. 5 χ^2 distribution of the variance of arrival-angle fluctuations

$$P(r_0) = c_1 \exp(-c_2 r_0^{-5/6}) \cdot r_0^{-(5/6+1)} \quad (24)$$

其中: C_1, C_2 为两个常数。图 6 中实验的统计分布与本文得到的模拟湍流池相干长度的分布函数 $P(r_0)$ 符合得很好。

图 7 是利用 CCD 得到的到达角在水平方向和垂直方向的起伏谱。从图中分析表明: 有两个量级的区域满足“ $-8/3$ ”律, 且水平方向和垂直方向起伏谱的一致性, 进一步证明模拟湍流池产生的湍流在光路横切方向上具有各向同性的特征。

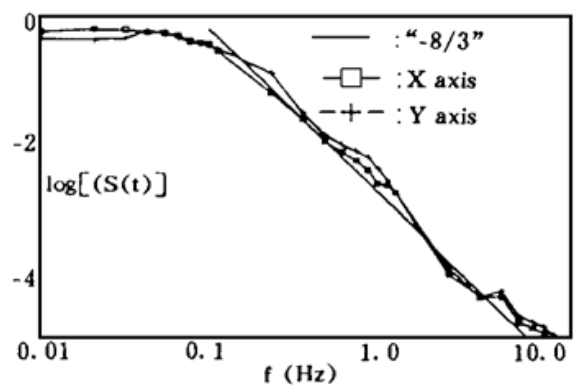
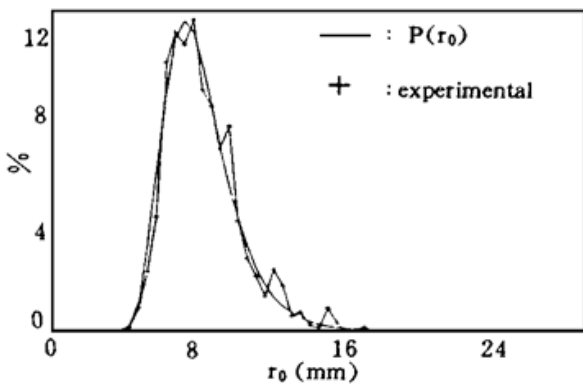


Fig. 6 The distribution for experimentally determined Fried's Coherence Length in the convective turbulent tank

Fig. 7 Normalized spectrum of the arrival-angle fluctuations

结 论 实验结果充分说明了两种测量 r_0 的方法(即到达角起伏法和温度脉动法)的一致性, 以及到达角起伏的正态分布和湍流池湍流强度的平稳性。模拟湍流不仅和大气湍流在结构上完全相似, 而且在其平稳性上比大气湍流更加理想。因此本文介绍的湍流池是进行传输研究和工程实验比较理想的装置。

用水做介质的对流湍流池, 至少在定性上满足以往用空气做介质的对流池所导出的相似关系。使用统计方法来处理光学湍流的问题, 有助于定量处理传输问题, 有助于比较和分析不同随机量的测量结果。

感谢宋正方教授提供了有关相干长度测量资料。

参 考 文 献

- [1] D. L. Fried, Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures. *J. Opt. Soc. Am.*, 1966, **56**: 1372~ 1379
- [2] V. Tatarski 著, 湍流大气中波的传播理论(中译本). 温景嵩, 宋正方, 曾宗泳等译, 北京, 科学出版社, 1978, **5**: 196~ 227
- [3] F. Roddier, The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. in *Progress in Optics*, XIX, Edited by E. Wolf, Published by North-Holland physics Publishing, A Division of Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, The Netherlands, 1981, 281~ 376
- [4] L. G. Kazovsky, Tracking accuracy of laser systems: Theory, *Optical Engineering*, 1983, **22**(3): 339 ~ 347
- [5] 宋福山, 光斑在四象限探测器上偏移的非线性分析. *激光与红外*, 1982, (12): 57~ 65
- [6] Zeng Zongyong, Ma Chengsheng, Liu Xiaochun *et al.*, An analysis of the turbulent structure in the unstable surface layer nearby a shelter belt, *Advances in Atmospheric Sciences*, 1989, **6**(4): 493~ 500
- [7] L. R. Bissonnette, Atmospheric scintillation of optical and infrared waves: A laboratory simulation. *Appl. Opt.*, 1977, **16**(8): 2242~ 2251
- [8] J. W. Deardorff, Investigation of turbulent thermal convection between horizontal plates. *J. Fluid Mech.*, 1967, **28**: 675~ 704
- [9] D. E. Fitzjarrald, An experimental study of turbulent convection in air. *J. Fluid Mech.*, 1976, **73**(4): 693~ 719
- [10] J. S. 贝达特, A. G. 皮尔索, 凌福根译, 随机数据分析方法. 北京, 国防工业出版社, 1976: 125~ 127
- [11] J. S. 贝达特, A. G. 皮尔索, 凌福根译, 随机数据分析方法. 北京, 国防工业出版社, 1976: 105~ 111

Optical Structure of Fried's Coherence Length in the Convective Turbulent Tank

Zhang Jun Zeng Zongyong Gong Zhiben

(Anhui Institute of Optics & Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031)

(Received 6 January 1996)

Abstract The Fried's Coherence Length quantitatively was measured by means of two different methods in the convective turbulent tank for adaptive compensation experiments. The spectra of arrival-angle fluctuations and its probability distribution were given. It was showed that the spectra of arrival-angle fluctuations agreed with the theoretical prediction “ $- 8/3$ ” power law. The fluctuations of phase followed a normal distribution. The χ^2 distribution appeared to be a reasonable assumption for variance of arrival-angle fluctuations. The spectrum of arrival-angle in X axis same as the spectrum in Y axis indicated obviously that the turbulence in the tank was isotropic feature. The experimental results between the Fried's Coherence Length and temperature differences between heated-plate and cooled-plate, agreed with the similar relationship in fluid mechanics and thermodynamics experiments in the convective tank.

Key words fried's coherence length, convective turbulent tank, spectrum of arrival-angle fluctuation.