

相位移法中的量化误差效应*

赵 兵 郭 彬 方如华

(同济大学光测力学研究室, 上海 200092)

Yves Surrel

(法国圣太田高等矿业学院)

摘 要 对相位移测量技术中的条纹强度量化所引起的相位误差进行了定量研究。给出了相位测量误差与条纹强度误差之间的统计关系式, 对条纹强度量化误差进行傅里叶级数展开, 并利用条纹强度与相位的关系求得该级数的系数, 进而得到标准 N 幅算法的相位的解析表达式。最后对强度量化误差效应的一些影响因素进行了讨论。

关键词 相位移, 量化, 相位误差, 相关性。

1 引 言

相位移测量(PSM)技术作为一种高精度的相位测量方法, 已广泛地应用于多种光学场测量。对它的详细评述及几种主要误差源, 如: 相移误差, 摄像元件的非线性特性, 量化误差, 振动和气流扰动, 条纹信号高阶谐波效应等, 已有多位学者进行了讨论^[1-7]。

本文主要讨论由条纹图像信号的量化所引起的条纹相位测量误差。在相移法中考虑量化误差效应的研究可追溯至 1981 年, Koliopoulos^[7]给出三幅算法(3 Sample Algorithm)的误差分析。Brophy^[8]讨论了 90° 相移算法的相位误差的方差与量化灰度级数之间的关系。但他们的分析仅考虑了一些特殊情况。

相位移技术需要数幅有相移的条纹图像。相位测量误差与这些条纹图间的条纹强度误差的相关性有关。而确定这一相关性是研究相移测量的量化误差效应的难点。本文尝试用傅里叶级数法克服这个困难, 给出了标准 N 幅相移算法^[1](N Sample Algorithm)的相位误差公式。本文所用的分析方法亦可推广到其他特殊的相位移算法。

2 条纹相位测量误差公式

2.1 条纹相位差和条纹强度误差之间的相互关系:

在以下分析中, 假定每幅图像中的待测相位在 $[0, 2\pi]$ 范围是均匀分布的。

第 n 幅条纹图像上点 (x, y) 处的条纹模拟信号强度可表示为

* 上海市自然科学基金重点资助项目, 国家留学人员回国基金项目。

收稿日期: 1995 年 10 月 20 日; 收到修改稿日期: 1996 年 3 月 21 日

$$I_n(x, y) = I_A(x, y) + I_B(x, y) \cos [\varphi(x, y) + \delta_n] \quad (1)$$

此处 I_A 为条纹平均强度, I_B 为条纹调制强度, φ 为待测条纹相位; $\delta_n = n\delta$ 是第 n 幅条纹图的相移量, δ 称之为相移参数, 对于标准的 N 幅相移算法

$$\delta = 2\pi/N \quad (2)$$

因为 I_A 、 I_B 和 φ 都与 n 无关, 也就是说对于不同条纹图的同一点 (x, y) , 它们是相同的, 从而将第 n 幅图像的条纹模拟信号强度简记为

$$I_n = I_A + I_B \cos \theta_n \quad (3)$$

其中,

$$\theta_n = \varphi + \delta_n \quad (4)$$

对于标准 N 幅算法来说, 待测相位 φ 决定于下列方程^[6]

$$\exp(i\varphi) = \frac{2}{NI_B} \sum_{n=0}^{N-1} I_n \exp(-i\delta_n) \quad (5)$$

式中 i 为虚数单位。

量化后的条纹强度信号记为:

$$Q_n = INT(I_n) \quad (6)$$

式中 $INT(I_n)$ 表示取离 I_n 最近的整数, 因此, 由量化引起的条纹强度误差为:

$$\Delta I_n = I_n - Q_n \quad (7)$$

用相位移技术实测的相位 φ 由下式决定^[6]:

$$\begin{aligned} \exp(i\varphi) &= \frac{2}{NI_B} \sum_{n=0}^{N-1} Q_n \exp(-i\delta_n) \\ &= \exp(i\varphi) - \frac{2}{NI_B} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta I_n \exp(-i\delta_n) \\ &= \exp(i\varphi) \left[1 - \frac{2}{NI_B} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta I_n \exp(-i\theta_n) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

此处,

$$\varphi = \varphi + \Delta\varphi \quad (9)$$

$\Delta\varphi$ 是由量化过程引起的相位误差。

联立方程(8)~(9), 利用近似表达式 $\exp(i\varphi) \approx (1 + i\Delta\varphi) \exp(i\varphi)$, 相位误差可表示为

$$\Delta\varphi \approx \frac{2}{NI_B} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta I_n \sin \theta_n \quad (10)$$

$\Delta\varphi$ 的均值为

$$\begin{aligned} \overline{\Delta\varphi} &\approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi NI_B} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \Delta I_n \sin \theta_n d\theta_n \\ &= \frac{1}{\pi NI_B} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\int_0^{\pi} \Delta I_n \sin \theta_n d\theta_n + \int_{\pi}^{2\pi} \Delta I_n \sin \theta_n d\theta_n \right] \end{aligned}$$

图 1 示出模拟条纹信号与其量化后的数字条纹信号的关系。可以看出量化引起的条纹强度误差 ΔI_n 是关于 $\theta_n = \pi$ 对称的, 即 $\Delta I_n(\theta_n) = \Delta I_n(2\pi - \theta_n)$, 且 $\sin \theta_n = -\sin(2\pi - \theta_n)$ 。所以上式中二个积分符号相反、大小相等, 其和为零, 即 $\overline{\Delta\varphi} = 0$ 。

$\Delta\varphi$ 的方差为:

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \frac{2}{(NI_B)^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [\langle \Delta I_m \Delta I_n \rangle \cos \delta_{mn} - \langle \Delta I_m \Delta I_n \cos (\theta_m + \theta_n) \rangle] \quad (11)$$

其中

$$\delta_{mn} = \delta_m - \delta_n = 2\pi \frac{m-n}{N} \quad (12)$$

方程中的 $\langle \rangle$ 表示对随机变量 φ 的统计平均运算。

2.2 强度误差的正交相关函数

量化的条纹强度 Q 是 θ 的以 2π 为周期的周期函数, 它可展开为傅里叶级数:

$$Q = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos (s\theta) + \sum_{s=1}^{\infty} b_s \sin (s\theta) \quad (13)$$

注意到 $\cos \theta = \cos (-\theta)$, $Q(\theta) = Q(-\theta)$ (见图 1), 所有的系数 b_s 都消失了, 从而方程 (13) 变为:

$$Q = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos (s\theta) \quad (14)$$

量化强度误差

$$\Delta I = I - Q = c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \cos (s\theta) \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} c_0 = I_A - a_0 \\ c_1 = I_B - a_1 \\ c_s = -a_s, (s \geq 2) \end{cases} \quad (16)$$

略去复杂的推导过程, (11) 式中的二个相关函数可写为:

$$\langle \Delta I_m \Delta I_n \rangle = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} c_s^2 \cos (s\delta_{mn}) \quad (17)$$

及

$$\langle \Delta I_m \Delta I_n \cos (\theta_m + \theta_n) \rangle = \frac{1}{4} c_1^2 + \frac{1}{2} c_0 c_2 \cos \delta_{mn} + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} c_s c_{s+2} \cos [(s+1)\delta_{mn}] \quad (18)$$

2.3 条纹量化强度的傅里叶展开系数

为了计算系数 c_s , 须先计算方程(14) 中的系数 a_s , 即:

$$\begin{cases} a_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q \cos (s\theta) d\theta, & (s \geq 1) \\ a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q d\theta \end{cases} \quad (19)$$

如果以 q_k 表示量化信号 Q 的离散值, 并假定该信号占有 P 个量化灰度级(参见图 1), 则图 1 中的 α 角度与 q_k 的关系可表示为:

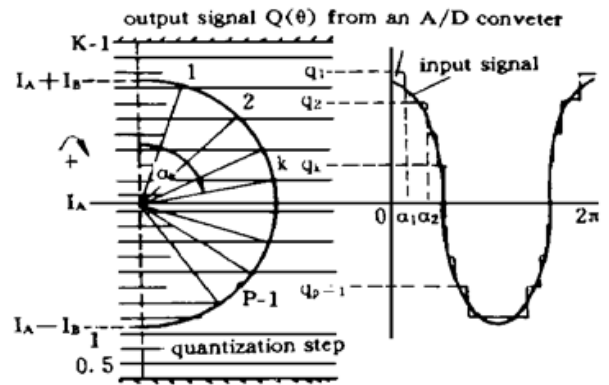


Fig. 1 Illustration of the quantization system, and of the relationship between the quantized signal Q and the phase θ

$$\alpha_k = \begin{cases} 0, & (k = 0) \\ \arccos\left(\frac{q_k - 0.5 - I_A}{I_B}\right), & (0 < \alpha_k < \pi, 1 \leq k \leq P - 1) \\ \pi, & (k = P) \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$P = INT(I_A + I_B) - INT(I_A - I_B) + 1, \quad (0 \leq P \leq K - 1) \quad (21)$$

此处, 量化步长取 1 个灰度级; K 为量化转换器的量化级数, 例如, 5 位(bits) 量化器的量化级数为 $2^5 = 32$ (灰度级)。 $K - 1 \geq P$ 意味着输入信号小于量化量程。如果输入的模拟信号超过量化范围, 则量化信号将发生畸变, 为简单起见, 这种情况不予考虑。

据此, 将量化信号写为:

$$Q = \begin{cases} q_1 = INT(I_A + I_B), & (\alpha_0 < \theta < \alpha_1) \\ q_k = q_1 - k + 1, & (\alpha_{k-1} < \theta < \alpha_k) \end{cases} \quad (22)$$

代入(19)式, 最终得到

$$\begin{cases} a_s = \frac{2}{\pi B} \sum_{k=1}^{P-1} \sin(s\alpha_k) \\ a_0 = q_R + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{P-1} \alpha_k \end{cases} \quad (23)$$

2.4 相位误差的标准方差

经过一些简单的运算, 可得如下结果

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \cos \delta_{mn} = 0 \\ \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\delta_{mn}) = 0 \end{cases}, \quad (N \geq 3) \quad (24)$$

利用上式, 并将(17)、(18)式代入方程(11), 得到相位测量误差的方差

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta\varphi}^2 &= \frac{1}{N^2 I_B^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{s=2}^{\infty} [c_s^2 \cos(s\delta_{mn}) \cos \delta_{mn} - c_{s+2} c_s \cos(s\delta_{mn} + \delta_{mn})] \\ &= \frac{1}{2N^2 I_B^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{s=2}^{\infty} [c_s^2 \cos(s\delta_{mn} + \delta_{mn}) + c_s^2 \cos(s\delta_{mn} - \delta_{mn}) \\ &\quad - 2c_s c_{s+2} \cos(s\delta_{mn} + \delta_{mn})] \end{aligned} \quad (25)$$

对(24)式进行推广, 有:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(s\delta_{mn}) = \begin{cases} N^2, & (N \geq 3, s = Nt \geq 3, t \text{ 为整数}) \\ 0, & (\text{其它的 } s) \end{cases} \quad (26)$$

(25)式可最终简化为:

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \frac{1}{2I_B^2} \sum_{t=1}^{\infty} (c_{tN+1} - c_{tN-1})^2 \quad (27)$$

3 结果分析

公式(27)可用于计算因量化而引起的相位误差的方差, 数值计算时取量化级数 K 为 32 (5bits) 至 256 (8bits); 条纹图像数 N 为 4 至 16 幅; 且令 $I_A = 0.5K$, $I_B = 0.5K - 1$ 。为了验证以上的分析解, 本文还进行了与分析过程完全独立的数值模拟试验。模拟所用的 K , N , I_A 和 I_B 的值与前者一样。数值模拟过程如下。

1) 产生 N 个大小为 10000 个点的一维数组, 每个数组代表一幅条纹图, 数组中的值(实数)为根据方程(1) 计算得到的条纹图模拟信号强度。对这 10000 个点, 相位 φ 从 0 至 2π 均匀变化。

2) 对第一步计算得到的真实强度四舍五入成整数而得到每个点的量化强度值。

3) 利用量化强度值, 通过方程(8) 计算每个点的实测相位 $\hat{\varphi}$ 。然后计算每个点的相位误差 $\hat{\varphi} - \varphi$ 最后计算相位误差的方差。

本文所有的计算均取双精度型。表 1 给出了相位测量误差的标准差的解析值和模拟值(单位为 $2\pi/1000$ rad), σ_s 列出的是模拟值, 而 σ_A 列出的是解析值。从表 1 可看出, 解析值和模拟值非常接近。

从表 1 中还可看出:

- 1) 条纹图数 N 为偶数值时, 相位误差通常大于由邻近的奇数值 N 对应的相位误差;
- 2) 相位误差的变化趋势是随 N 增大而逐渐减小。

由方程(27) 可得, 相位误差的标准差与调制强度 I_B 近似成反比, 为了减少这一误差, 条纹模拟信号强度必须尽可能大地覆盖 A/D 转换器的动态范围。

Table 1. Analysis and simulation results of the standard deviation of phase error due to quantization, The phase error is given in $2\pi/1000$ rad, σ_s is the simulation result, σ_A is the analytic result

K	32		64		128		256	
	σ_A	σ_s	σ_A	σ_s	σ_A	σ_s	σ_A	σ_s
4	3.20	3.20	1.48	1.47	0.74	0.74	0.35	0.35
5	1.83	1.82	0.96	0.96	0.47	0.47	0.22	0.22
6	2.68	2.67	1.28	1.28	0.62	0.62	0.30	0.30
7	1.53	1.53	0.69	0.69	0.40	0.40	0.18	0.18
8	2.10	2.10	1.03	1.02	0.55	0.55	0.25	0.25
9	1.84	1.85	0.71	0.71	0.37	0.37	0.19	0.19
10	1.83	1.82	0.96	0.96	0.47	0.47	0.22	0.22
11	1.30	1.30	0.48	0.48	0.32	0.32	0.16	0.16
12	1.85	1.85	0.98	0.98	0.42	0.42	0.20	0.20
13	0.95	0.95	0.59	0.59	0.27	0.27	0.15	0.15
14	1.53	1.53	0.69	0.69	0.40	0.40	0.18	0.18
15	1.56	1.56	0.53	0.53	0.32	0.33	0.12	0.13
16	1.23	1.24	0.79	0.79	0.37	0.37	0.18	0.18

4 结论与讨论

本文提出一种研究量化所引起的相位误差的方法, 给出了条纹相位测量误差和条纹强度量化误差之间的统计关系, 该关系表明: 相位误差的方差不仅依赖于每幅图像的条纹强度量化误差, 而且依赖于不同条纹图像之间的强度量化误差的相关性。

相位误差明显依赖于量化的比特数, 对于一个 5 bits 的量化, 利用 4 幅算法求得的最大标准差为 3.20 ($2\pi/1000$ rad); 而对于 8bits 的量化, 相位误差的最大标准差为 0.36 ($2\pi/1000$ rad), 这表明: 对于 8 bits 以上的量化, 量化引起的相位误差一般是很小的。

相位误差与调制强度成反比, 因此在实际测量中, 应尽可能使条纹信号覆盖量化系统的

全部动态范围。

使用较多的条纹图可降低相位误差。

参 考 文 献

- [1] J. E. Greivenkamp, J. H. Bruning, Phase Shifting Interferometers. Chap. 14 in Optical shop testing, edited by D. Malacara, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1991: 501~ 598
- [2] R. S. Sirohi, M. P. Kothiyal, Heterodyne and Phase Shifting Interferometry. Chap. 6 in Optical components, Systems, and Measurement Techniques, New York, Marcel Dekker, Inc., 1991: 219~ 246
- [3] D. Shough, Beyond Fringe Analysis. *Proc. SPIE*, 1993, **2003**, Interferometry VI, 208~ 223
- [4] K. Creath, Phase-measurement interferometry, Beware these errors. *Proc. SPIE*, 1991, **1553**: 213~ 220
- [5] J. V. Wingerden, H. J. Frankena, C. Smorenburg, Linear approximation for measurement errors in phase shifting interferometry. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(19): 2718~ 2729
- [6] Bing Zhao, Yves Surrel, Phase shifting: six-sample self-calibrating algorithm insensitive to the second harmonic in the fringe signal. *Opt. Eng.*, 1995, **34**(9): 2821~ 2822
- [7] C. L. Koliopoulos, Interferometric Optical Phase Measurement Techniques. Ph. D. Dissertation, University of Arizona, Tucson, USA, 1981
- [8] C. Brphy, Effect of intensity error correlation on the computed phase of phase-shifting interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, A, 1990, **7**(4): 537~ 541

Effect of Quantization Error on the Computed Phase of Phase-Shifting Measurement

Zhao Bing Guo Bin Fang Ruhua Yves Surrel*

[*Division of Photomechanics, Tongji University, Shanghai 200092*]

* *Ecole des Mines de Saint-Etienne, France*

(Received 20 October 1995; revised 21 March 1996)

Abstract The effect of the quantization of the fringe intensity on the phase error in phase-shifting measurement is formulated. An expression of the statistical relationship between the measured phase error and the fringe intensity error is presented. The expansion of the intensity error in Fourier series allows to obtain an analytic expression for the variance of the phase given by a standard N -sample algorithm. A numerical simulation is performed, and its result is in good agreement with the analytic one. Several factors influencing the quantization effects are discussed.

Key words phase-shifting, quantization, phase error, correlation.