

TEM₀₁* 模式激光对两能级原子的作用力研究

刘勋铭 王育竹

(中国科学院上海光学精密机械研究所量子光学开放实验室, 上海 201800)

摘 要 推导了两能级原子在稳态和小速度一阶微扰近似下的受力矢量方程, 并分析表明 TEM₀₁* 模光场对原子的作用力中存在旋涡力。对在大正失谐 $\delta \gg \Omega_0 \gg \Gamma$ 和 $z \ll z_0 = kw^2/\lambda$ 条件下的 TEM₀₁* 模行波和驻波场中原子的受力进行了分析。对行波场, 自发辐射对原子运动的影响很大, 但在 $r \ll \lambda$ 区域内原子受到横向囚禁力; 对驻波场, 自发辐射的影响可以忽略。考虑在 z 方向波长范围内原子的平均受力得到的结论为: 在横向, 除了有稳态偶极囚禁力外还有对横向速度 v_e 产生的阻尼力; 在纵向, 不存在囚禁力但对纵向速度 v_z 产生阻尼, 在 $r \ll \lambda$ 区域内原子也只受到横向囚禁力。

关键词 TEM₀₁* 模式, 激光冷却与囚禁, 两能级原子。

1 引 言

近十年来激光冷却技术得到了飞速的发展, 各国科学家设计了各式各样的陷阱来囚禁和冷却中性碱金属原子, 以使原子的冷却温度更低、被囚禁的原子密度更高。用大正失谐偶极力形成光势阱来囚禁原子的研究已有报道^[1, 2], 由于原子被囚禁在零势能附近, 可大大减少外界电磁场对原子能级的干扰和增加原子在势阱中的相干时间^[1]。本文提出用正失谐 TEM₀₁* 模来构成一种新的偶极力光势阱, TEM₀₁* 模或“面包圈(doughnut)”模由频率简并但位相差为 90° 的 TEM₀₁ 模和 TEM₁₀ 模的叠加所产生。设电场的实数形式为^[3]

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ [\tilde{E}_{01}(\mathbf{r}) + \tilde{E}_{10}(\mathbf{r}) \exp(i\pi/2)] \exp(-i\omega t) \}$$
$$= (2 \sqrt{2} E_{0w} w_0 / \omega^2) \exp(-r^2/w^2) \cos[\omega t - (kz + kr^2/2R - 2\eta + \theta)] \quad (1)$$

其中 $|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $w = w_0(1 + z^2/z_0^2)^{1/2}$, $R = z(1 + z_0^2/z^2)$,
 $z_0 = \pi w_0^2/\lambda$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$, $\eta = \tan^{-1}(z/z_0)$

它在 z 轴上的场强为零, 在光斑的中心出现了“黑洞”, 且电场的位相沿绕 z 轴的任何闭合线积分的值为 $\pm 2\pi$ ^[4], 因此在 z 轴上它的位相是不确定的, 这与通常的 TEM₀₀ 模相比差别非常大。稳定的 TEM₀₁* 模可在激光腔内直接产生或通过计算机生成全息图来获得^[4~6]。

2 原子受力分析

原子与激光场组成的总哈密顿量为

$$H = P^2/2m + \hbar\omega|e\rangle\langle e| + \sum_j \hbar\omega(a_j^\dagger a_j + 1/2) - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{x}, t) + V_{AV} \quad (2)$$

$P^2/2m + \hbar\omega|e\rangle\langle e|$ 是原子哈密顿量; $|e\rangle$ 、 $|g\rangle$ 分别代表原子的上、下能级, 取 $E_g = 0$, ω 为原子的共振频率。 $\sum_j \hbar\omega(a_j^\dagger a_j + 1/2)$ 是真空辐射场的能量, a_j^\dagger 、 a_j 分别是光子的产生、湮灭算符。 $-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{x}, t)$ 和 V_{AV} 分别为原子电偶极矩 \mathbf{d} 与激光场和真空场的耦合, 其中 $\mathbf{E}_L(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cos[\omega t - \Phi(\mathbf{x})]$, \mathbf{x} 为原子质量中心的位置, ω 为激光场频率。注意由于激光场在这里是 C 数场, 故没有列入表达式中。由于 $\langle e|\mathbf{d}|g\rangle = \langle g|\mathbf{d}|e\rangle = d_{eg}$, 所以 $\mathbf{d} = d_{eg}(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)$ 。应用旋波近似可得

$$-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{x}, t) = [\hbar\Omega(\mathbf{x})/2]\{\exp[i\Phi(\mathbf{x}) - i\omega t]|e\rangle\langle g| + h.c.\} \quad (3)$$

其中 $\Omega(\mathbf{x}) = -d_{eg} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})/\hbar$ 为拉比频率。在这里作半经典近似, 即原子的动量和坐标作为经典变量来处理, 当原子的动量远大于光子反冲动量时, 此假设是合理的。令 $\sigma = |g\rangle\langle e|$ 、 $\alpha(\mathbf{x}) = \nabla\Omega/\Omega$ 、 $\beta(\mathbf{x}) = \nabla\Phi$ 、 $v_1 = \text{Re}(\langle\sigma^\dagger\rangle \exp\{-i[\omega t - \Phi(\mathbf{x})]\})$ 、 $v_2 = \text{Im}(\langle\sigma^\dagger\rangle \exp\{-i[\omega t - \Phi(\mathbf{x})]\})$ 、 $v_3 = \frac{1}{2}[\langle\sigma_{ee}\rangle - \langle\sigma_{gg}\rangle]$, 由于对运动原子 $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t)$, 所以 $\dot{\Phi} = \mathbf{v} \cdot \nabla\Phi = \mathbf{v} \cdot \beta$ 。利用海森堡方程可得

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Gamma/2 & \delta - \mathbf{v} \cdot \beta & 0 \\ -(\delta - \mathbf{v} \cdot \beta) & -\Gamma/2 & -\Omega \\ 0 & \Omega & -\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Gamma/2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中 $\Gamma = \omega^3|d|^2/3\pi\epsilon_0\hbar c^3$ 为上能级线宽、 $\delta = \omega - \omega_0$ 为失谐量。下面分别对稳态和小速度情况进行讨论。

2.1 稳态解

令(4)式左边为 0, 由公式 $f = \langle -\partial H/\partial\alpha \rangle$ 来求出稳态时原子的平均受力

$$\mathbf{f}^0 = \hbar(-\delta) \frac{s}{1+s} \alpha + \hbar \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \beta = \mathbf{f}_\alpha^0 + \mathbf{f}_\beta^0 \quad (5)$$

其中 $s = (\Omega^2/2)(\delta^2 + \Gamma^2/4)^{-1}$ 为饱和参数。(5) 式的第二项 $\mathbf{f}_\beta^0 = \hbar(\Gamma/2)[s/(1+s)]\beta$ 称为散射力或辐射压力, 它来源于光子吸收-自发辐射过程。第一项 $\mathbf{f}_\alpha^0 = \hbar(-\delta)[s/(1+s)]\alpha$ 称为偶极力, 它与光场在空间分布的不均匀性有关, 故对平面波而言, 只存在辐射压力而不存在偶极力。偶极力 \mathbf{f}_α^0 可写为

$$\mathbf{f}_\alpha^0 = -\nabla U = -\nabla[(\hbar\delta/2) \ln(1+s)] \quad (6)$$

偶极力为保守力, 其势能的表达式为

$$U = (\hbar\delta/2) \ln[1 + \Omega^2/2/(\delta^2 + \Gamma^2/4)] \quad (7)$$

因此对正失谐 δ 而言, 原子将被推到光强弱即势能低的地方。

2.2 小速度近似解 ($|k \cdot v| \ll \Gamma$)

一个运动原子将感受到一个被修正的电场, 在小速度近似下考虑速度的一阶微扰, 有 $d\mathbf{E}/dt = \partial\mathbf{E}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{E}$, 在 $t \gg \Gamma^{-1}$ 的时间后, $\partial/\partial t$ 的影响将消失, (4) 式左边变为 $\mathbf{v} \cdot \nabla$ 的形式, 经过繁琐的计算后得到了一阶速度微扰 \mathbf{f}_α 和 \mathbf{f}_β 的矢量一般解,

$$\mathbf{f}_\alpha = (-\hbar\delta) \frac{s}{1+s} \alpha \left\{ 1 + \left[\frac{2s^2}{(1+s)^2} \frac{1}{\Gamma} - \frac{1-s}{(1+s)^2} \frac{\Gamma}{\Gamma^2/4 + \delta^2} \right] (\mathbf{v} \cdot \alpha) \right. \\ \left. + \left[\frac{2\delta}{(\Gamma^2/4 + \delta^2)(1+s)} - \frac{1}{\delta} \right] (\mathbf{v} \cdot \beta) \right\} \quad (8)$$

$$f_{\beta} = (\hbar\Gamma/2) \frac{s}{1+s} \beta \left[1 + \left[\frac{2s^2}{(1+s)^2} \frac{1}{\Gamma} - \frac{1-s}{(1+s)^2} \frac{\Gamma}{\Gamma^2/4 + \delta^2} \right] (\nu \cdot \alpha) \right. \\ \left. + \left[\frac{2\delta}{(\Gamma^2/4 + \delta^2)(1+s)} \right] (\nu \cdot \beta) \right] \quad (9)$$

由(8)式可看出 f_{α} 与速度有关,已不是保守力。上述表达式用平面波 $\alpha = 0$ 、 $\beta = k$ 及驻波场 $\alpha = -k \tan(k \cdot x)$ 、 $\beta = 0$ 来检验可以发现此两个特例与文献[7]中的(17)、(18)式一致。对TEM₀₁模行波光场可得

$$\Omega = (2\sqrt{2}\Omega_0 w_0 r/w^2) \exp(-r^2/w^2), \quad \Phi = kz + kr^2/2R - 2\eta + \theta$$

稳态情况的偶极力表达式为

$$f_{\alpha}^0 = (-\hbar\delta) \{s(r, z)/[1+s(r, z)]\} (\alpha e_r + \alpha e_z) = f_{\alpha}^0 e_r + f_{\alpha}^0 e_z \quad (10)$$

其中 $\alpha = 1/r - 2r/w^2$, $\alpha_z = (2w_0^2/w^2)(z/z_0^2)[(r^2/w^2) - 1]$,
 $s(r, z) = [(\Omega_0^2/2)/(\delta^2 + \Gamma^2/4)](8w_0^2 r^2/w^4) \exp(-2r^2/w^2)$

稳态情况的偶极力对应的保守力势阱由 $U = (\hbar\delta/2) \ln[1+s(r, z)]$ 确定,由图1可看出在正失谐和 $z \ll z_0 = kw^2/\lambda$ 条件下光束中心势能最小,势能最大的位置在 $r = w_0/\sqrt{2}$ 处,因此在横向形成偶极力势阱。一般而言由于TEM₀₁光场的空间不均匀性,将产生横向和纵向的偶极力。在正失谐 $\delta > 0$ 的情况下,当 $0 < r < w/\sqrt{2}$ 时由 α 和 f_{α}^0 的表达式可知在横向将产生向内的囚禁力使原子向 $r \rightarrow 0$ 方向聚集;同时原子在纵向将被推离束腰 $z = 0$ 的位置,尤其在聚焦焦点很小时,光在纵向发散度很大,因而除了 $r = 0$ 附近,原子将受到很大的纵向偶极力。稳态情况的散射力表达式为

$$f_{\beta} = \frac{\hbar\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} (\beta_{\theta} e_{\theta} + \beta_r e_r + \beta_z e_z) \quad (11)$$

其中 $\beta_{\theta} = \frac{1}{r}$ 、 $\beta_r = \frac{krz}{z^2 + z_0^2} e_r$ 、 $\beta_z = k \left[1 - \frac{r^2(z^2 - z_0^2)}{2(z^2 + z_0^2)^2} \right] - \frac{2z_0}{z^2 + z_0^2}$ 。此散射力除了与高斯光束一样有横向和纵向散射力外,还有沿 e_{θ} 方向的旋涡力存在,这是TEM₀₁模在 z 轴上位相不确定性的体现,是基模所不存在的,因此原子在该光场中的受力情况要复杂得多。

3 大正失谐光场中原子的横向囚禁和冷却效应

3.1 光场为行波场

在小速度近似下,原子受力表达式为(8)式、(9)式。设光场的纵向发散度很小,即 $z \ll z_0 = kw^2/\lambda$,此外设激光频率为大正失谐并且饱和系数很小,即 $\delta \gg \Omega \gg \Gamma$ 、 $s \ll 1$,在此条件下可得

$$f_{\alpha} = (-\hbar\delta) s \left[1 + \frac{2s^2 \nu \cdot \alpha}{\Gamma} + \nu \cdot \beta \delta \right] \alpha \quad (12)$$

$$f_{\beta} = (\hbar\Gamma/2) s \left[1 + \frac{2s^2 \nu \cdot \alpha}{\Gamma} + 2\nu \cdot \beta \delta \right] \beta \quad (13)$$

由于 $\alpha = \alpha e_r$, (12)式可写为标量方程 $f_{\alpha} = f_{\alpha}^0 - k_r \nu_r - k_{r\theta} \nu_{\theta} - k_{rz} \nu_z$,其中 $k_r = 2\hbar\delta s^3 \alpha^2/\Gamma$, $k_{r\theta}$

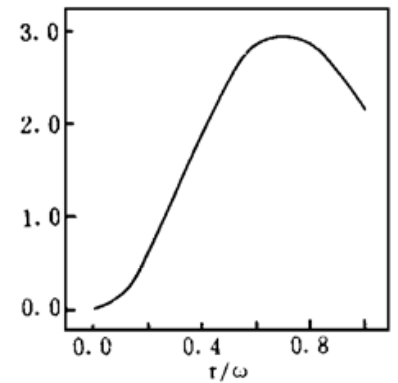


Fig. 1 Curve of $u/(\hbar\Gamma/2) \sim r$ on condition of $z \ll z_0$, TEM₀₁ light is linearly polarized, laser power is 1 W, $w_0 = 100 \mu\text{m}$, $\delta/\Gamma = 10^4$, for Sodium atom the saturation intensity is $I_s = 20 \text{ mW/cm}^2$, the trap is formed in the region of $0 < r < w/\sqrt{2}$

= $\hbar s \alpha / r$, $k_{rz} = \hbar k s \alpha$ 。对正失谐 $\delta > 0$, 当 $0 < r < w / \sqrt{2}$ 时 k_r 大于零且随 r 而变化, 其中 v_r 、 v_θ 和 v_z 由初始条件和原子受力方程 $f = m \frac{dv}{dt}$ 所决定, 由(13) 可看出纵向散射力将对小速度原子产生加速, $k_r v_\theta$ 和 $k_{rz} v_z$ 大于零, 因此横向囚禁力可表示为 $f_{trap} = f_\alpha^0 - k_r v_\theta - k_{rz} v_z$, 它与速度 v_θ 和 v_z 和坐标 r 有关, 阻尼力为 $k_r v_r$ 。但在 $r \ll \lambda$ 的区域由于 $|f_\beta / f_\alpha| \ll 1$, 自发辐射对原子运动的影响可以忽略, 原子在此区域将受到横向向内的囚禁力、对速度阻尼力也可忽略。

3.2 光场为驻波场

设其它条件与光场为行波场时一样, 但由两束相向而行的 TEM₀₁ 模形成驻波场, 可得

$$\alpha = (1/r - 2r/w^2) e_r - (k \tan kz) e_z = \alpha e_r + \alpha e_z \tag{14}$$

$$\beta = (1/r) e_\theta \tag{15}$$

在驻波光场作用范围内均有 $|f_\beta / f_\alpha| \ll 1$, 自发辐射力的影响可忽略。将考虑在 z 方向波长范

围内原子的平均受力, 令 $f_\alpha = (1/\lambda) \int_{-N/2}^{N/2} f_\alpha dz$, 由于 $s = \tilde{s}(r) \cos^2 kz \ll 1$, 其中 $\tilde{s}(r) = [16\Omega^2 r^2 \exp(-2r^2/w^2)] / w^2 \delta^2$, 简化后可得

$$f_\alpha = (f_\alpha^0 - k_r v_r) e_r - k_z e_z \tag{16}$$

其中 $f_\alpha^0 = (-\hbar \delta) \tilde{s}(r) / 2\alpha$, $k_r = (15\hbar \delta s^3 / 24\Gamma) \alpha^2$, $k_z = \hbar k^2 \delta s^3 / 8\Gamma$ 。

由图 2 可知在横向, 稳态偶极力在 $0 < r < w / \sqrt{2}$ 范围内为囚禁力。对横向速度 $v_\theta e_\theta$ 存在阻尼力, 阻尼系数为 k_r 。在纵向, 偶极力的平均值为零但对纵向速度 $v_z e_z$ 产生阻尼, 阻尼系数为 k_z , 通过缀饰原子方法^[8] 同样可分析出在一维大正失谐驻波场中小速度近似下原子存在阻尼力。由图 3 和图 4 可看出横向和纵向阻尼系数均与 r 有关, 一般而言 k_z 比 k_r 大得多, 但在 $|r| \ll \lambda$ 区域内横向和纵向阻尼力可忽略。同此可见, 一般而言对速度很小的原子, 用三对波矢方向相互正交的三维大正谐驻波场中可由每束光的横向力使原子得到三维囚禁, 由每束光的纵向力使原子产生阻尼力。

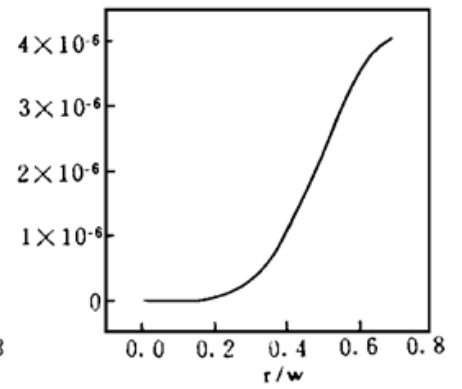
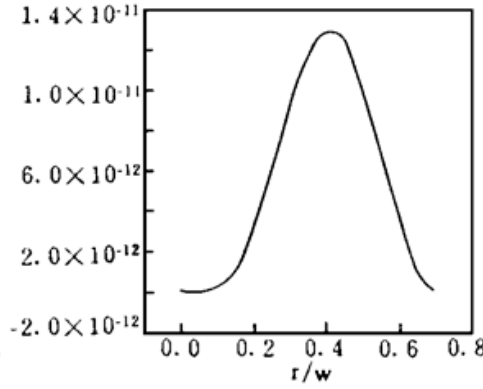
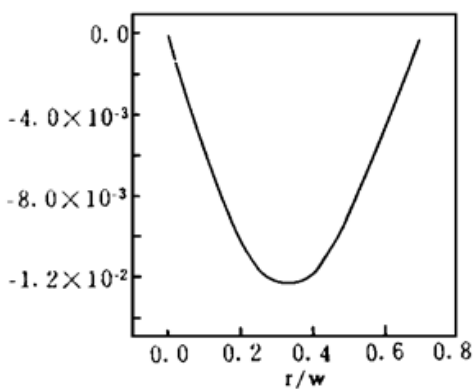


Fig. 2 Curve of $f_\alpha^0 / (\hbar k / 2) \sim r$ in the standing wave field, the parameter is the same as Fig. 1

Fig. 3 Curve of $k_r / (\hbar k^2 / 2) \sim r$ in the standing wave field, the parameter is the same as Fig. 1

Fig. 4 Curve of $k_z / (\hbar k^2 / 2) \sim r$ in the standing wave field, the parameter is the same as Fig. 1

TEM₀₁ 模光场有潜在的应用价值, 如考虑在 $|r| \ll \lambda$ 区域内原子所受阻尼力与囚禁力相比可忽略, 对一维驻波场而言原子在 $U = (1/2)kr^2$ 的保守力势阱中作周期运动, 其中 $k = 8\hbar\Omega^2 / w^2 \delta$ 。对特定速度的原子在某个时刻将出现势能最大的动能为零的状态, 此时突然撤掉外加光场可望得到温度极低的冷原子团。因此将 TEM₀₁ 模用于激光冷却和囚禁是一个独特的新想法, 深入开展这方面的理论和实验研究具有现实意义。

参 考 文 献

- [1] J. D. Miller, R. A. Cline, D. J. Heinzen, Far-off-resonance optical trapping of atoms. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **47**(6): R4567~ 4570
- [2] Nir Davidson, Heun Jin Lee, Charles S. Adams *et al.*, Long atomic coherence times in a optical dipole trap. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **74**(8): 1311~ 1314
- [3] A. 亚里夫著, 刘颂豪, 吴存恺, 王明常译, 量子电子学. 上海科技出版社, 1983: 123
- [4] A. G. White, C. P. Smith, N. R. Heckenberg *et al.*, Interferometric measurements of phase singularities in the output of a visible laser. *J. Modern Optics*, 1991, **38**(12): 2531~ 2541
- [5] M. Harris, C. A. Hill, J. M. Vaughan, Optical helices and spiral interference fringes. *Opt. Commun.*, 1994, **106**(4, 5, 6): 161~ 166
- [6] N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith *et al.*, Laser beams with phase singularities. *Opt. & Quant. Electron.*, 1992, **24**(): s951~ s962
- [7] J. P. Gordon, A. Askin, Motion of atoms in a radiation trap. *Phys. Rev. (A)*, 1980, **21**(4): 1606~ 1617
- [8] J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, Dressed-atoms approach to atomic motion in laser light: the dipole force revised. *J. O. S. A m. (B)*, 1985, **2**(11): 1707~ 1720

Study of Force of TEM₀₁* Laser on Two-Level Atoms

Liu Xunming Wang Yuzhu

(Laboratory for Quantum Optics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics,
The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 30 October 1995; revised 29 February 1996)

Abstract The steady and 1st order velocity dependent vector solutions of forces for two-level atom are obtained. The solutions are applied to TEM₀₁* laser beam and analysis shows that it exists vortex force acting on the atom. On the condition of $z \ll z_0 = kw^2/\lambda$ and large blue detuning $\delta \gg \Omega_0 \gg \Gamma$, the forces of TEM₀₁* travelling and standing wave field acting on atom are analyzed. In general, for travelling wave filed the spontaneous emission plays an important role. In the region of $r \ll \lambda$, atoms are only subject to transeverse trapping force. For standing wave filed the influence of spontaneous emission can be negligible. Averaging the forces in wavelength region along the direction of z , we show that there exist transeverse trapping force and damping force for velocity $v_r \mathbf{e}_r$ and there has not longitudinal trapping force but has longitudinal damping force for $v_z \mathbf{e}_z$. In the region of $r \ll \lambda$, there only exists transeverse trapping force as well.

Key words TEM₀₁* laser, laser cooling and trapping, two-level atom.