

q 变形光场与两能级原子相互作用 中场的位相特性

王荣瑶

邵 彬

(首都师范大学物理系, 北京 100037) (北京理工大学应用物理系, 北京 100081)

摘 要 用变形 Pegg-Barnett 位相理论研究了在共振情况下变形 Jaynes-Cummings (J-C) 模型中场的位相特性。讨论了 q 变形参量对场位相统计和动力学性质的影响。

关键词 变形 J-C 模型, 位相概率分布, 位相涨落。

1 引 言

量子变形代数及其在物理学各领域中的可能应用是近年来十分关注的研究课题。在量子光学中, 光场通常采用量子线性振子描述, 作为推广, 光场可由非线性 q 变形振子实现, 此时系统含有一个新的可调参数 q 。如何认识 q 变形的物理内涵, 并通过对变形系统的研究获得实验上能够观测的理论预言量是当前人们正积极努力的目标。

Chaichian 等人^[1]首先考虑了单模 q 变形光场与不作变形的两能级原子相互作用的强度相关耦合 J-C 模型。之后, 人们对不同类型的变形 J-C 模型中原子的动力学行为^[2-4]及场的压缩特性^[4]进行了深入讨论。由于光场量子位相是量子光学中一个重要的概念, 因此变形场位相性质的研究对认识变形场性质是十分有意义的。最近, Nelson 等人^[5]讨论 q -相干态场位相的统计性质。本文则是运用近年来颇受重视的 Pegg-Barnett 位相理论^[6,7]研究与原子相互作用的 q 变形相干光场位相概率分布性质以及位相涨落随时间演化的动力学行为, 揭示场变形程度对场位相性质的影响。

2 变形 J-C 模型及其演化

对于 q 变形系统, q 光子产生和湮没算符满足如下代数对易关系

$$\begin{aligned} a_q a_q^\dagger - q a_q^\dagger a_q &= q^{N_q} \\ [N_q, a_q^\dagger] &= a_q^\dagger, \quad [N_q, a_q] = -a_q \end{aligned} \quad (1)$$

在 q 参数化的 Fock 空间 $\{|n\rangle_q, n = 0, 1, 2, \dots\}$ 中有

$$\begin{aligned} a_q |0\rangle &= 0, \quad |n\rangle_q = \{(a_q^\dagger)^n / \sqrt{[n]!}\} |0\rangle_q \\ a_a |n\rangle_a &= \sqrt{[n]} |n-1\rangle_a, \quad a_a^\dagger |n\rangle_a = \sqrt{[n+1]} |n+1\rangle_a \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $[n] = (q^n - q^{-n}) / (q - q^{-1})$, $[n]! = [n][n-1]\cdots[1]$ 。

在旋波近似下, q 变形光场与不变形两能级原子相互作用的哈密顿量表示为^[4]

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1, [H_0, H_1] = 0 \\ H_0 &= \omega(N_q + \sigma_z) \\ H_1 &= 2\Delta\sigma_x + g(a_q^+ \sigma_- + a_q \sigma_+) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 σ_x 和 σ_{\pm} 为原子赝自旋算符。 $\Delta = (\omega_b + \omega) / 2$ 为失谐量。 ω, ω_b 分别为变形场频率和原子跃迁频率。 g 表示变形场与原子耦合常数。 在相互作用绘景中系统演化算符为^[4]:

$$U_I(t) = \exp(-iH_I t) = \begin{pmatrix} \cos At - i\Delta \frac{\sin At}{A} & -ig a_q \frac{\sin Bt}{B} \\ -ig \frac{\sin Bt}{B} a_q^+ & \cos Bt + i\Delta \frac{\sin Bt}{B} \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中 $A = (\Delta^2 + g^2 a_q a_q^+)^{1/2}$, $B = (\Delta^2 + g^2 a_q^+ a_q)^{1/2}$ 。 假设初始时刻原子处于基态。 变形光场处于 q -相干态,

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle_q &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(in\beta) |n\rangle_q \\ b_n &= \exp_q(-\bar{n}/2) \left[\frac{\bar{n}^n}{[n]!} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\beta = \arg \alpha$ 表示 q -相干态场的位相, $\bar{n} = |\alpha|^2$ 表示平均 q 光子数, q -指数函数定义为

$$\exp_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n / [n]! \quad (6)$$

在共振情况下 ($\Delta = 0$), 系统演化到任意时刻的状态为

$$\begin{aligned} |\Psi_I(t)\rangle &= U_I(t) |\alpha\rangle_q \otimes |-\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(in\beta) \{ \cos(\sqrt{[n]}gt) |n\rangle_q \otimes |-\rangle - i \sin(\sqrt{[n]}gt) |n-1\rangle_q \otimes |+\rangle \} \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $|-\rangle, |+\rangle$ 分别表示两能级原子的基态和激发态。

3 变形场的位相性质

类比 Pegg-Barnett 的位相理论^[6,7], 在有限的 $s+1$ 维 Hilbert 空间中定义一组正交归一的变形位相态, 其在 q -Fock 空间中的表示为^[5]

$$|\theta_m\rangle_q = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta_m) |n\rangle_q \quad (8)$$

$$\theta_m = \theta_0 + 2\pi m / (s+1), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

其中参考位相 θ_0 为任意实数。 在 $s+1$ 维空间中, q -厄米位相算符定义为

$$\phi_q = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle_q \langle \theta_m| \quad (10)$$

容易证明位相态 $|\theta_m\rangle_q$ 是算符 ϕ_q 的本征态, 相应本征值为 θ_m 。 与位相有关量的期待值的计算均在有限 $s+1$ 维空间中进行, 待求出之后将 s 趋于无穷大。 由(7)、(8)两式, 得变形场位相概率分布为:

$$\begin{aligned} P_q(\theta_m, t) &= |{}_q \langle \theta_m | \Psi_I(t) \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+1} \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(n-k)(\beta - \theta_m)] \cos[(\sqrt{[n]} - \sqrt{[k]})gt] \end{aligned} \quad (11)$$

将其中参考位相选择为 $\theta_0 = \beta - \pi s / (s + 1)$ ，并代换 $\mu = m - s / 2$ 。 μ 的变化范围从 $-s / 2$ 到 $s / 2$ ，因此位相概率分布相对 μ 是对称的。在 $s \rightarrow \infty$ 的连续谱极限下，用 θ 代替 $2\pi\mu / (s + 1)$ ， $d\theta$ 代替 $2\pi / (s + 1)$ ，则随连续变量 θ 变化的位相概率分布为

$$P_q(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(n - k)\theta] \cos[(\sqrt{[n]} - \sqrt{[k]})gt] \right) \quad (12)$$

由上式可以看出位相分布在对称区间 $[-\pi, \pi]$ 内是归一化的，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_q(\theta, t) d\theta = 1 \quad (13)$$

并且
$$P_q(\theta, t) = P_q(-\theta, t) \quad (14)$$

表明 $P_q(\theta, t)$ 分布相对 $\theta = 0$ 是对称的。 $t = 0$ 时，该分布回复到 q -相干态场的情形，与 Nelson 等人^[5]的结果一致。当 $q \rightarrow 1$ 时，则回到标准 J-C 模型场的位相概率分布^[8]。

图 1 显示了与原子相互作用的变形相干态场位相概率分布在 q 的不同取值下，随 θ 的变化情况。时间取为 $t = t_r$ ， $t_r = \pi / (\sqrt{[n + 1]} - \sqrt{[n]})g$ 为原子反转的回复时间^[4]，与 q 变形相关。因 $[n]$ 在 $q \rightarrow 1/q$ 代换下不变，所以可只讨论 $0 < q < 1$ 的取值范围，由图 1 可看到 q 偏离 1 后，原先峰尖位于 $\theta = \pm \pi$ (未变形情形) 的两峰向 $\theta = 0$ 处靠拢。随着场变形程度的增强，峰宽渐宽，峰高下降。约在 $q = 0.8$ 处，两峰开始合并。双峰结构最后在 $q = 0.7$ 处演化成单峰结构，峰状的移动和峰结构的变化反映出系统量子相干性和非线性行为的变化，正如文献 [2] 指出的， q 的非线性行为类似于光子与非线性吸收介质的某类耦合系数的变化行为。

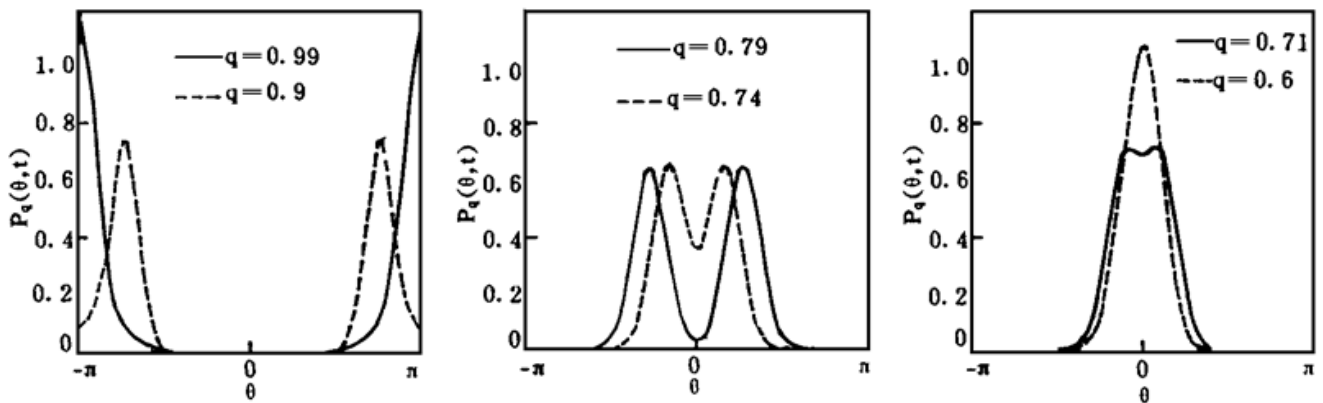


Fig. 1 Phase probability distribution as a function of θ for the mean q -photon number $\bar{n} = 20$ and $t = t_r$. q 变形 J-C 模型场的位相平均值和涨落分别为

$$\langle \phi_q \rangle = \sum_{m=0}^s \theta_m P_q(\theta_m, t) \quad (15)$$

$$\langle \Delta \phi_q \rangle = \sum_{m=0}^s (\theta_m - \langle \phi_q \rangle)^2 P_q(\theta_m, t) \quad (16)$$

在连续谱极限下 ($s \rightarrow \infty$)，注意到 $\frac{1}{s+1} \sum_{m=0}^s \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta$ 及 $\theta_m = \theta + \beta$ ，则(15)、(16)两式化为

$$\langle \phi_q \rangle = \beta \quad (17)$$

$$\langle \Delta \phi_q \rangle = \pi^2 / 3 + 4 \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(\sqrt{[n]} - \sqrt{[k]})gt] (-1)^{n-k} / (n - k)^2 \quad (18)$$

(17) 式表明初始具有确定位相的 q -相干态与原子相互作用中位相平均值与演化时间和变形参量无关，说明任意时刻 q 变形场的位相概率分布相对初始位相平均值 β 保持对称分布形式。

q 变形场的位相涨落随时间演化特点如图 2 所示，场轻微变形时 ($q = 0.99$)，位相涨落初

始时呈现较大幅度的周期振荡, 振荡幅度随时间衰减很快, 仅出现有限的几个振荡便趋于位相完全随机的数态位相涨落值 $\pi^2/3$ ^[7], 说明具有确定初始位相且轻微变形的相干态光场与原子共振相互作用中, 位相涨落随时间会演化成无规位相的非相干光场。光场变形程度增强后, 如图 $q = 0.9$ 所示, 场位相涨落幅值的衰减随时间进程不再趋于 $\pi^2/3$, 而是在 $\pi^2/3$ 附近叠加上一个小的振荡起伏, 该起伏反映了系统的量子噪音特性, 它随 q 畸变程度增大而趋于显著化, 并在 $q = 0.8$ 的取值附近, 位相涨落呈现出明显的崩溃与回复现象。其回复能力较差。随着 q 进一步偏离 1 而逐渐演化成为混乱无规的较大起伏振荡, 此时系统表现出很强的量子相干性和非线性行为, 这本质上是 q 参量量子特征和非线性行为的内在反映。

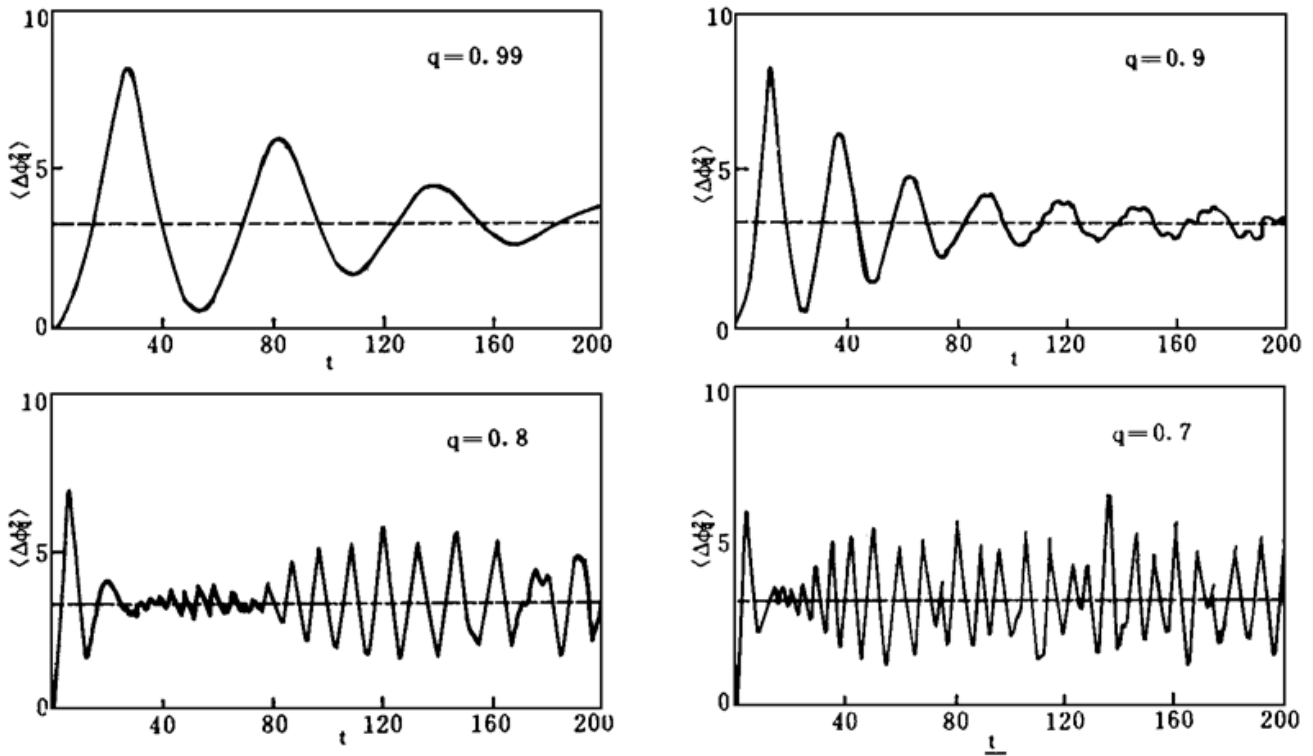


Fig. 2 The time evolution of the phase variance for the mean q -photon $\bar{n} = 20$ and the coupling constant $g = 1$

结 论 本文探讨了与两能级原子相互作用的 q 变形光场位相性质, 结果表明, 场的变形程度可导致位相概率分布峰值结构的变化, 在适当的 q 变形下, 场位相涨落呈现明显的崩溃与回复现象。反映出 q 变形参量的量子性特征和非线性行为对系统的影响。

参 考 文 献

- [1] M. Chaichian, D. Ellinas, P. Kulish, Quantum algebra as the dynamical symmetry of the deformed Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(8): 980~ 983
- [2] V. Buzek, The Jaynes-Cummings model with a q analogue of a coherent state. *J. Mod. Opt.*, 1992, **39**(5): 949~ 959
- [3] J. Crnugelj, M. Martinis, V. M. Martinis, Jaynes-Cummings model and the deformed oscillator algebra. *Phys. Lett. (A)*, 1994, **188**(3): 347~ 354
- [4] J. Crnugelj, M. Martinis, V. M. Martinis, Properties of a deformed Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1994, **50**(2): 1785~ 1791
- [5] C. A. Nelson, N. H. Fields, Number and phase uncertainties of the q -analogue quantized field. *Phys. Rev. (A)*, 1995, **51**(3): 2410~ 2429
- [6] D. T. Pegg, S. M. Barnett, Unitary phase operator in quantum mechanics. *Europhys. Lett.*, 1988, **6**(6): 483~ 487

- [7] S. M. Barnett, D. T. Pegg, On the Hermitian optical phase operator. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(1): 7~19
- [8] H. T. Dung, R. Tanas, A. S. Shumovsky, Collapses, revivals and phase properties of the field in Jaynes-Cummings type models. *Opt. Commun.*, 1990, **79**(6): 462~ 468

Phase Properties of the Deformed Light Field Interacting with a Two-Level Atom

Wang Rongyao

(*Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100037*)

Shao Bin

(*Department of Applied Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081*)

(Received 2 June 1995; revised 1 December 1995)

Abstract Phase properties of the field in the deformed J-C model at the resonant case are studied by using the deformed Pegg-Barnett phase theory. The effect of the phase statistical and dynamical properties on the q -deformed parameter is discussed.

Key words deformed J-C model, phase probability distribution, phase fluctuation.