第 16 卷 第 11 期 光 学 学 报 Vol. 16, No. 11
1996 年 11 月 ACTA OPTICA SINICA November, 1996

高阶压缩的另一种定义

董传华
(上海大学(本部) 基础部, 上海 200072)

摘 要 在高阶测不准关系基础上提出了光场高阶压缩的另一个定义。它不同于 Hong 和 Mandel 定义的高阶压缩, 在本文的定义中高阶压缩的准则是场振幅的高阶基础量子涨落。利用它研究了压缩相干态和迭加态的高阶压缩, 并与 Hong 及 Mandel 的结果作了比较。

关键词 高阶压缩, 测不准关系。

1 引 言

在引出高阶压缩定义之前, 先回忆一下二阶压缩的定义。考虑一个单模电磁场振幅的两个正交分量 a_1 和 a_2, 它们分别定义为:

$$a_1 = (a^+ + a)/2, \qquad a_2 = i(a^+ - a)/2 \tag{1}$$

a_1 与 a_2 满足对易关系和测不准关系

$$[a_1, a_2] = i/2, \qquad \langle(\Delta a_1)^2\rangle\langle(\Delta a_2)^2\rangle \geqslant 1/16 \tag{2}$$

那么, 如果某个分量 $a_j(j = 1$ 或 $2)$ 的方差 $\langle(\Delta a_j)^2\rangle$ 小于它在相干态中的值 1/4, 那么就称 a_j 是二阶压缩[1](定义Ⅰ)。另一种定义是建立在测不准关系基础上的。一般地讲, 如果两个非对易的量 A 和 B 具有下列测不准关系:

$$\langle(\Delta A)^2\rangle_\psi\langle(\Delta B)^2\rangle_\psi \geqslant \frac{1}{4}\left|\langle[A, B]\rangle_\psi\right|^2 \tag{3}$$

那么 A(或 B) 在 $|\Psi\rangle$ 态中的测不准量 $\langle(\Delta A)^2\rangle_\psi$(或 $\langle(\Delta B)^2\rangle_\psi$) 受到它在该态中的基础量子涨落 $\left|\langle[A, B]\rangle_\psi\right|/2$ 的限制。如果 A(或 B) 在 $|\Psi\rangle$ 态中的方差小于其在该态中的基础量子涨落, 那么就称 A(或 B) 是二阶压缩的[2](定义Ⅱ)。对于 a_1、a_2 来说, 这基础量子涨落 $\left|\langle[a_1, a_2]\rangle_\psi\right|/2$ 恰好等于它在相干态中的方差(1/4), 并且由于 $[a_1, a_2]$ 是 C 数, 因此这基础量子涨落与态无关。在这种情况下, 定义Ⅱ与定义Ⅰ是等价的。但如果考虑的是其他量, 这时 $[A, B]$ 就不一定是 C 数, 这时定义Ⅱ和定义Ⅰ并不等价, 而且应该用定义Ⅱ。例如在考虑场振幅平方的实部 $Y_1 = \frac{1}{2}(a^{+2} + a^2)$ 及虚部 $Y_2 = \frac{i}{2}(a^{+2} - a^2)$ 的压缩时, 就用定义Ⅱ来定义其压缩[3]。因此定义Ⅱ比定义Ⅰ有更广泛的应用范围。

Hong 和 Mandel 按照定义Ⅰ自然地推广到高阶, 给出了光场振幅的高阶压缩的定义[4], 即 $a_j(j = 1$ 或 $2)$ 在某个态中的 K 阶矩小于其在相干态中的 K 阶矩时称 a_j 为 K 阶压缩。由于二阶压缩有上述两个定义, 因而很自然地想把定义Ⅱ推广到高阶, 建立以高阶测不准关系为基础的光场振幅高阶压缩的定义。

收稿日期: 1995 年 8 月 30 日

2 高阶压缩的定义

如果有两个厄密算符 F 和 G，就可以构成一个态矢 $|\varphi\rangle$

$$|\varphi\rangle = (F + i\lambda G)|\psi\rangle \tag{4}$$

其中 λ 是一个实参量。由于 $\langle\varphi|\varphi\rangle \geqslant 0$，有不等式：

$$\langle F^2\rangle_\psi + \lambda^2\langle G^2\rangle_\psi - i\lambda\langle[G, F]\rangle_\psi \geqslant 0 \tag{5}$$

这是一个关于 λ 的二次不等式，它成立的条件是：

$$|\langle[G, F]\rangle_\psi|^2 - 4\langle F^2\rangle_\psi\langle G^2\rangle_\psi \leqslant 0 \tag{6}$$

现在令 $G \equiv (A - \langle A\rangle_\psi)^{K/2}$，$F \equiv (B - \langle B\rangle_\psi)^{K/2}$，其中 K 是偶数，于是就得到了二个非对易算符 A 和 B 在态 $|\psi\rangle$ 中满足的 K 阶测不准关系：

$$\langle(\Delta A)^K\rangle_\psi\langle(\Delta B)^K\rangle_\psi \geqslant \frac{1}{4}|\langle[(\Delta A)^{K/2}, (\Delta B)^{K/2}]\rangle_\psi|^2 \tag{7}$$

当 $K = 2$ 时，(7) 式与(3) 式一致。因此可给出 a_1 或 a_2 在 $|\psi\rangle$ 态中 K 阶压缩的条件是：

$$\langle(\Delta a_j)^K\rangle_\psi < \frac{1}{2}|\langle[(\Delta a_1)^{K/2}, (\Delta a_2)^{K/2}]\rangle_\psi|, \qquad (j = 1, 2) \tag{8}$$

这就是本文提出的 K 阶压缩定义。显然，$K > 2$ 时，这定义不同于 Hong 和 Mandel 的定义。它表明，发生 K 阶压缩时场振幅的某个分量在 $|\psi\rangle$ 态中的 K 阶涨落 $\langle(\Delta a_j)^K\rangle_\psi$ 小于它在该态中的 K 阶基础量子涨落 $\frac{1}{2}|\langle[(\Delta a_1)^{K/2}, (\Delta a_2)^{K/2}]\rangle_\psi|$。经计算可以得到在 $|\psi\rangle$ 态中的部分对易关系 $\langle[(\Delta a_1)^m, (\Delta a_2)^m]\rangle_\psi$：

$$\left.\begin{aligned}
&\langle[(\Delta a_1), (\Delta a_2)]\rangle_\psi = i/2 \\
&\langle[(\Delta a_1)^2, (\Delta a_2)^2]\rangle_\psi = 2i(\langle : a_1a_2 : \rangle_\psi - \langle a_1\rangle_\psi\langle a_2\rangle_\psi) \\
&\langle[(\Delta a_1)^3, (\Delta a_2)^3]\rangle_\psi = \frac{3}{32}i - \frac{27}{2}i\langle a_1\rangle_\psi^2\langle a_2\rangle_\psi^2 + 18i\langle a_1\rangle_\psi\langle a_2\rangle_\psi\langle : a_1a_2 : \rangle_\psi \\
&\qquad - 9i(\langle a_1\rangle_\psi\langle : a_1a_2^2 : \rangle_\psi + \langle a_2\rangle_\psi\langle : a_1^2a_2 : \rangle_\psi) \\
&\qquad + \frac{9}{2}i(\langle a_1\rangle_\psi^2\langle : a_2^2 : \rangle_\psi + \langle a_2\rangle_\psi^2\langle : a_1^2 : \rangle_\psi) \\
&\qquad + \frac{9}{8}i[(\langle : a_1^2 : \rangle_\psi - \langle a_1\rangle_\psi^2) + (\langle : a_2^2 : \rangle_\psi - \langle a_2\rangle_\psi^2)] \\
&\qquad + \frac{9}{2}i\langle : (a_1a_2)^2 : \rangle_\psi
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中记号：： 表示 a^+、a 的正规序积展开。a_j 在 $|\psi\rangle$ 态中的 K 阶矩为[4]：

$$\langle(\Delta a_j)^K\rangle_\psi = \sum_u^{K/2}\frac{K^{(2u)}}{u!}\left(\frac{1}{2}\right)^{3u}\langle : (\Delta a_j)^{K-2u} : \rangle_\psi \tag{10}$$

其中 $K^{(2u)} = K!/(K - 2u)!$。根据条件(8)，可定义 K 阶压缩参量：

$$S_j^{(K)} = \langle(\Delta a_j)^K\rangle_\psi - \frac{1}{2}|\langle[(\Delta a_1)^{K/2}, (\Delta a_2)^{K/2}]\rangle_\psi| \tag{11}$$

为了比较，按 Hong 和 Mandel 的定义，相应的 K 阶压缩参量定义为

$$S_j^{(K)} = \langle(\Delta a_j)^K\rangle_\psi - \langle(\Delta a_j)^K\rangle_c \tag{12}$$

于是，K 阶压缩的条件是 $S_j^{(K)} < 0$。$\langle(\Delta a_j)^K\rangle_c$ 是相干态中的 K 阶矩。

3 压缩相干态中的高阶压缩

压缩相干态$|\beta\rangle$是

$$|\beta\rangle = S(\zeta)|\alpha\rangle \tag{13}$$

其中压缩算符$S(\zeta)$为:

$$S(\zeta) = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta^{*} a^{2} - \frac{1}{2}\zeta a^{+2}\right) \tag{14}$$

压缩参数$\zeta = r\exp(i\theta)$。S将a和a^{+}分别变换为b和b^{+}

$$b = S^{+}(\zeta) a S(\zeta) = a\,\mathrm{ch}\, r - a^{+}\exp(i\theta)\,\mathrm{sh}\, r \tag{15}$$

$$b^{+} = S^{+}(\zeta) a^{+} S(\zeta) = a^{+}\,\mathrm{ch}\, r - a\exp(-i\theta)\,\mathrm{sh}\, r \tag{16}$$

利用(15)、(16)式可先求部分$b^{+m}b^{n}$的正规序积展开式, 并进而得到下列结果:

$$\left.\begin{aligned}
&\langle[(\Delta a_1), (\Delta a_2)]\rangle_\beta = \frac{i}{2} \\
&\langle[(\Delta a_1)^2, (\Delta a_2)^2]\rangle_\beta = \frac{i}{2}\mathrm{sh}(2r)\sin\theta \\
&\langle[(\Delta a_1)^3, (\Delta a_2)^3]\rangle_\beta = \frac{3}{32}i + \frac{27}{32}i[\mathrm{sh}(2r)]^2\sin^2\theta
\end{aligned}\right| \tag{17}$$

而a_j在压缩相干态中的K阶矩为:

$$\langle(\Delta a_j)^K\rangle_\beta = 2^{-K}(K-1)!![\mathrm{ch}(2r) + (-1)^j\,\mathrm{sh}(2r)\cos\theta]^{K/2} \tag{18}$$

利用(17)、(18), 可计算出本文所定义的K阶压缩参量。图 1 给出了$K = 4$和 6 时$S_1^{(K)}$对r的关系。其中实线是根据本文的定义, 虚线是根据 Hong 和 Mandel 的定义, 以便比较。图 2 表示了a_1的四阶和六阶压缩区域。这区域是用极坐标(r, θ)画的, 在这区域内的r, θ值能使a_1得到相应阶的压缩。从这些图中可以看到根据两种高阶压缩定义得到的结果完全不同。按 Hong 和 Mandel 定义, 任何偶数阶压缩区域相同, 即存在低阶压缩的也一定存在高阶压缩。但按本文定义得到的压缩区域, 在不同阶下是不同的, 存在高阶压缩的不一定存在低阶压缩。

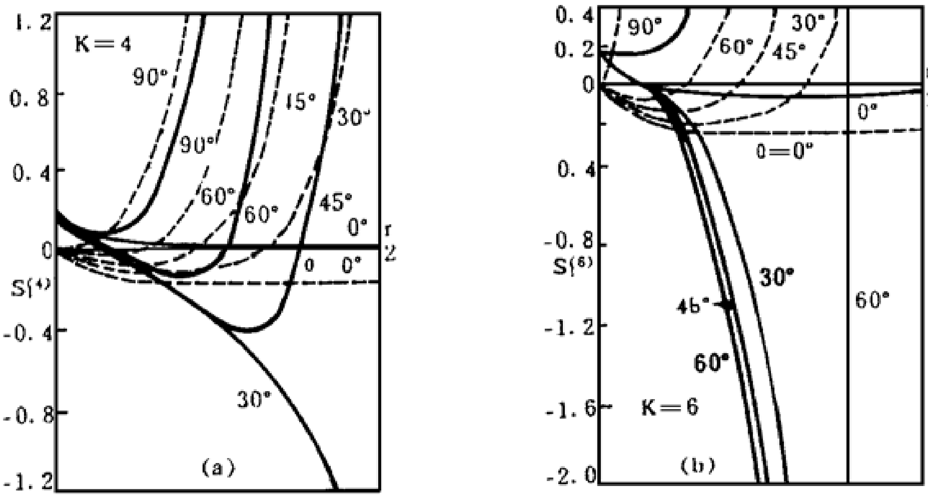

Fig. 1 Squeezing parameters of a_1 for the squeezed coherent states vs. r. The solid lines are plotted according to our definition and the dashed lines are plotted according to Hong and Mandel′s. These keys are also used in other figures

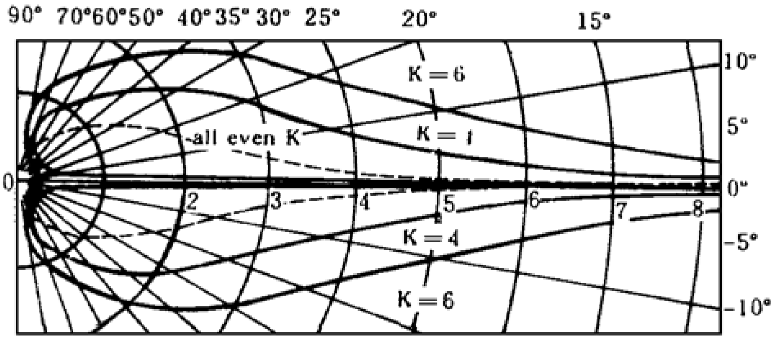

Fig. 2 Squeezing zones of fourth- and sixth-order squeezing for a_1 in the squeezed coherent states with polar corrdinates (r, θ)

根据本文的定义，a_1 产生四阶和六阶压缩时，θ 的取值范围大约分别为：$-74.4° < \theta < 74.4°(\theta \neq 0)$ (对四阶) 和 $-82.7° < \theta < 82.7°$(对六阶)。在 $\theta = 0$ 时，按 Hong 和 Mandel 的定义，对任何非零的 r，总能产生任意偶数阶的压缩，但按本文的定义，这时不可能出现四阶压缩，而且六阶压缩也只有当 $r > 0.2685$ 时才出现。换句话讲，a_1 在压缩相干态中四阶矩虽然可以小于它的相干态中的四阶矩，但在 $\theta = 0$ 时却不可能小于它在压缩相干态中的四阶基础量子涨落。

4　迭加态中的高阶压缩

产生压缩的两条基本途径是通过对真空态或相干态的简正变换及利用量子迭加原理。压缩相干态属于前者，而光子数迭加态(简称迭加态) 属于后者。本节再以迭加态为例讨论。迭加态 $|\Psi\rangle_{mn}$ 定义为[5]：

$$|\Psi\rangle_{mn} = C_m|m\rangle + C_n|n\rangle \tag{19}$$

其中 $|C_m|^2 + |C_n|^2 = 1$，C_m 与 C_n 之间相位差为 ϕ。在迭加态中四阶和六阶基础量子涨落分别为：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|\langle[(\Delta a_1)^2, (\Delta a_2)^2]\rangle_{mn}\right| &= \frac{1}{2}\left|\,|C_mC_n|\sqrt{n^{(2)}}\sin\phi\,\delta_{J,2} - n|C_mC_n|^2\sin(2\phi)\delta_{J,1}\right| \\
\frac{1}{2}\left|\langle(\Delta a_1)^3, (\Delta a_2)^3]\rangle_{mn}\right| &= \frac{1}{2}\left|\frac{3}{32} + \frac{9}{16}[m(m+1)|C_m|^2 + n(n+1)|C_n|^2]\right. \\
&\quad + \frac{9}{4}|C_mC_n|^2 n(|C_n|^2 - \frac{1}{2})\delta_{J,1} \\
&\quad - \frac{27}{8}|C_mC_n|^4\sin^2(2\phi)\delta_{J,1} \\
&\quad \left. - \frac{9}{16}|C_mC_n|\sqrt{n^{(4)}}\cos\phi\,\delta_{J,4}\right|
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

其中 $J \equiv n - m$，$n^{(r)} = n!/(n-r)!$

在单光子迭加态中($m = 0$, $n = 1$)，a_j 的四阶、六阶矩为：

$$\left.\begin{aligned}
\langle(\Delta a_j)^4\rangle_{01} &= \frac{9}{16} - 3\eta_j^4 - 3(\frac{1}{4} + \eta_j^2)\eta_3 \\
\langle(\Delta a_j)^6\rangle_{01} &= \frac{15}{16} - 5\eta_j^6 - \frac{15}{2}\eta_j^4 + \frac{45}{16}\eta_j^2 - (\frac{15}{2}\eta_j^4 + \frac{45}{4}\eta_j^2 + \frac{45}{32})\eta_3
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

其中 $\eta_1 = |C_0C_1|\cos\phi$, $\eta_2 = |C_0C_1|\sin\phi$, $\eta_3 = \frac{1}{2} - |C_1|^2$。相应的四阶、六阶基础量子涨落为:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left|\langle[(\Delta a_1)^2, (\delta a_2)^2]\rangle_{01}\right| = |\eta_1\eta_2| \\ &\frac{1}{2}\left|\langle[(\Delta a_1)^3, (\Delta a_2)^3]\rangle_{01}\right| = \left|\frac{21}{64} - \frac{9}{16}\eta_3 - \frac{9}{8}\eta_3(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \frac{27}{4}\eta_1^2\eta_2^2\right| \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

图 3(a)、图 3(b) 是 a_1 的四阶、六阶压缩参量 $S_1^{(K)}$ 与 $|C_1|^2$ 的关系。而 a_2 的压缩参量可以由 $S_2^{(K)}(\frac{\pi}{2} - \phi) = S_1^{(K)}(\phi)$ 关系式得出。从图 3(a)、图 3(b) 可以看出, 在单光子迭加态中不存在本文所定义的四阶、六阶压缩。也就是说, a_j 的四阶、六阶矩可以小于它的相干态中的四阶、六阶矩, 但不可能小于单光子迭加态中的四阶、六阶基础量子涨落。

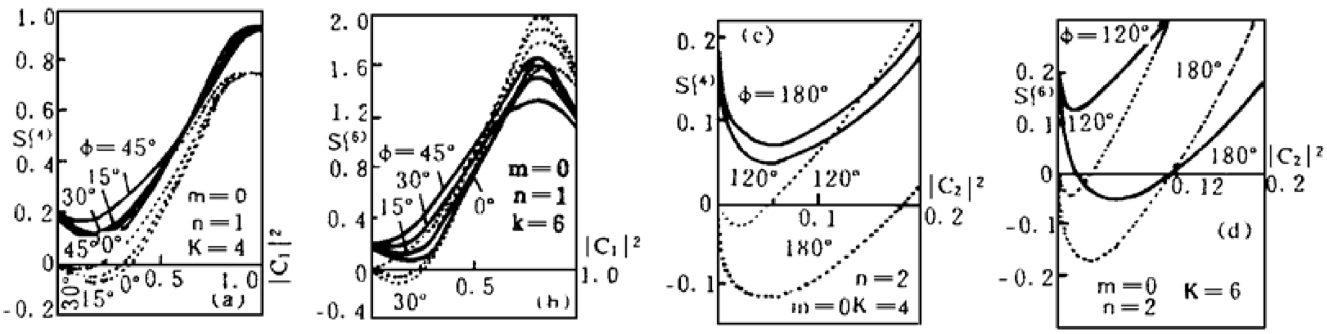

Fig. 3 Squeezing paraments of a_1 for the superposition states vs. $|C_n|^2$. (a), (c) are for fourth-and (b), (d) are for sixth-order squeezing

在二光子迭加态中 ($m = 0$, $n = 2$), a_j 的四阶、六阶矩及相应的基础量子涨落为:

$$\left.\begin{aligned} &\langle(\Delta a_j)^4\rangle_{02} = \frac{3}{16} + (-1)^{j-1}\frac{3\sqrt{2}}{4}|C_0C_2|\cos\phi + \frac{9}{4}|C_2|^2 \\ &\langle(\Delta a_j)^6\rangle_{02} = \frac{15}{64} + \frac{45}{8}|C_2|^2 + (-1)^{j-1}\frac{45\sqrt{2}}{32}|C_0C_2|\cos\phi \\ &\frac{1}{2}\left|\langle[(\Delta a_1)^2, (\Delta a_2)^2]\rangle_{02}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|C_0C_2||\sin\phi| \\ &\frac{1}{2}\left|\langle[(\Delta a_1)^3, (\Delta a_2)^3]\rangle_{02}\right| = \frac{1}{32}(\frac{3}{2} + 54|C_2|^2) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

图 3(c)、图 3(d) 表示了 a_1 的压缩参量 $S_1^{(K)}$ 与 $|C_2|^2$ 的关系。a_2 的压缩参量 $S_2^{(K)}$ 可由 $S_2^{(K)}(\pi - \phi) = S_1^{(K)}$ 得到。按照本文的定义在二光子迭加态中不存在四阶压缩, 但存在六阶压缩。当 $\phi = \pi$ 时, 在 $0.0163 < |C_2|^2 < 0.1111$ 范围内 a_1 将发生本文所定义的六阶压缩。

在二阶压缩的情况下, 一个振幅分量涨落的下降是以另一个分量涨落的增加为代价的。因此当一个分量发生二阶压缩的同时另一个分量就不可能发生二阶压缩。这从测不准原理是很容易理解的。但在高阶的情况下就不完全如此。例如在迭加态中当 $J = 4$ 时, $\langle(\Delta a_1)^K\rangle_{mn} = \langle(\Delta a_2)^K\rangle_{mn}(K \geqslant 4)$, 这意味着在此情况下, a_1 的 K 阶矩下降的同时也伴随着 a_2 的 K 阶矩下降。因此在 $J = 4$ 时, a_1 和 a_2 的 K 阶矩($K \geqslant 4$) 在适当的 ϕ, $|C_n|^2$ 值下可同时小于它们在相干态中的 K 阶矩, 从而同时发生 Hong 和 Mandel 意义下的高阶压缩[6]。这一点看来很难理解, 但它们并不违反高阶测不准关系。因为根据本文的定义, 这时 a_1 和 a_2 都不发生高阶压

缩。这种现象在$J/2$是偶数，$K \geqslant J/2$时都会出现。因此，用本文提出的定义可排除两个分量同时发生高阶压缩的缪误。

结 论 在量子力学中，两个非对易的可观察量的涨落是受到测不准关系限制的。场振幅涨落的最低极限是基础量子涨落，低于此极限时就表现出压缩。所以本文提出用K阶基础量子涨落作为判断K阶压缩的准则应该是合理的。由于测不准关系是一条普遍的原理，所以在此基础上建立的压缩定义也应是一个普遍适用的定义。近来研究还表明，除了场振幅外，其他物理量(例如振幅平方、相位等)也存在压缩现象，因此本定义也可推广到其他物理量的高阶压缩问题上。

参 考 文 献

[1] R. Loudon, P. L. Knight, Squeezed light. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(6/7): 709~759

[2] K. Wodkiewicz, On the quantum mechanics of squeezed states. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(6/7): 941~948

[3] Mark Hillery, Amplitude-squared squeezing of the electromagnetic field. *Phys. Rev.* (*A*), 1987, **36**(8): 3796~3802

[4] C. K. Hong, L. Mandel, Generation of higher-order squeezing of quantum electromagnetic field. *Phys. Rev.* (*A*), 1985, **32**(2): 974~982

[5] K. Wodkiewicz, P. L. Knight, S. J. Buckle *et al.*, Squeezing and superposition states. *Phys. Rev.* (*A*), 1987, **35**(6): 2567~2577

[6] 董传华, 混合迭加态的高阶压缩. 物理学报, 1992, **41**(3): 428~436

An Alternative Definition of Higher-Order Squeezing

Dong Chuanhua

(*Department of Fundamental Courses, Shanghai University, Shanghai* 200072)

(Received 30 August 1995)

Abstract Based on the higher-order uncertainty relation an alternative definition of higher-order squeezing is introduced in this paper. This definition differs from C. K. Hong and L. Mandel′s. The criterion of higher-order squeezing is the higher-order fundamental quantum fluctuation of amplitude. We examine the higher-order squeezing for the squeezed coherent states and the superposition states using this definition, and compared the results with Hong and Mandel′s.

Key words high-order squeezing, uncertainty relation.