第16卷　第10期　　光　学　学　报　　Vol. 16, No. 10
1996年10月　　ACTA OPTICA SINICA　　October, 1996

转面倍率与像差系数表达式中的问题

王　鹏　李润顺
(哈尔滨工业大学航天学院光电工程系, 哈尔滨 150001)
王志坚
(长春光学精密机械学院光电工程系, 长春120022)

摘　要　对一百年来沿用的传统像差理论提出了新的见解和修改意见, 指出转面倍率与像差系数表达式中的问题。

关键词　球差,　彗差,　正弦条件。

1　引　　言

1897年克尔伯(Kerber)提出了球差分布公式, 由此导出的像差系数及计算公式一直做为光学设计的理论基础, 初级象差系数法(下文简称PW法)则为光学设计的基本方法。球差分布公式的基点是先假定转面倍率α, 在理论上并没有严格证明。经理论分析和实例计算, 均说明该转面倍率表达式是不准确的, 由此产生的PW法就存在一定的问题, 因此, 有必要对像差理论进行新的探讨。

2　克尔伯球差分布公式之问题

2.1　转面倍率α的表达式的引用缺乏理论依据, 事实证明该表达式是不准确的。

克尔伯采用的转面倍率表达式为[1]:

$$\alpha = nu \sin u / n'u' \sin u' \tag{1}$$

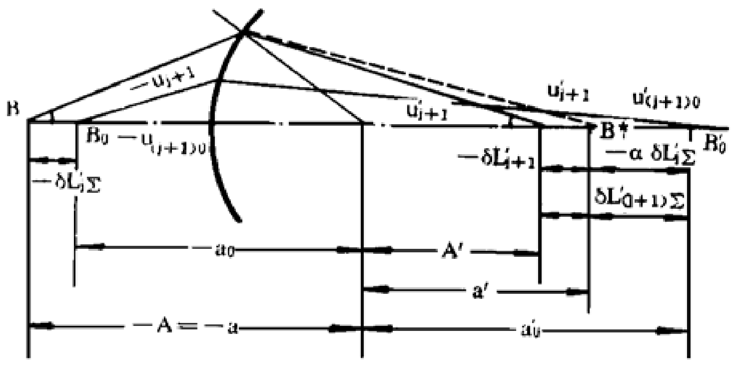

Fig. 1

图1为光学系统中序号为$j+1$的折射面光路。u_{j+1}、u_{j+1}'分别是该面某孔径光线的物、像方孔径角; u_{j+1}'是将前面系统该孔径光线的像点B视为此折射面物点时, 理想成像的像点B^*处的孔径角; $u_{(j+1)0}$和$u_{(j+1)0}'$分别是前面系统理想像点B_0和经此折射面后理想像点B_0'处的孔径角; $\delta L_{j\Sigma}'$为此折射面前面光学系统的球差; $\delta L_{j+1}'$是将

收稿日期: 1995年5月4日; 收到修改稿日期: 1995年8月7日

B 视为物点时，此面本身产生的球差；$\delta L'_{(j+1)\Sigma}$ 是考虑到前面系统球差贡献量和此面本身球差后总的球差。即 B'_0 是 B_0 的理想像点，B^* 是 B 的理想像点。由高斯公式得[2]：

$$\bar{\alpha}_j = n_{j+1}u_{(j+1)_0}u_{(j+1)B}/n'_{j+1}u'_{(j+1)_0}u'_{j+1} \tag{2}$$

式中 $u_{(j+1)B}$ 为 B 点处的物方近轴孔径角，与 u'_{j+1} 共轭。

转面倍率应采用(2)式，而不应是克尔伯提出的(1)式。下面以两个实例予以说明。

例1，一凸透镜，物在无限远，通光口径 $D=20$ mm，焦距 $f'=50.231$ mm，结构参数为

r	d	n	n_F	n_c	牌号
29.67	3.5	1.5163	1.521955	1.513895	K_9
197.70					

经计算，得透镜各孔径光束的球差，然后再以各孔径光束经一面后的像点做为二面的物点，对二面进行光路计算，得出 u'_2 和二面的本身球差 $\delta L'_2$，再根据 u'_1 和 $\delta L'_1$，用转面倍率 $\bar{\alpha}$ 计算，即

$$\delta L'_{2\cdot\Sigma} = \bar{\alpha}_1\delta L'_1 + \delta L'_2 \tag{3}$$

得到的透镜球差和直接光路计算得出的球差完全一样，而转面倍率用 α 时却不对，见表1。

Table 1.

h/h_M	$\delta L'_1$	$\delta L'_2$	$\delta L'_{2\cdot\Sigma}$	$\bar{\alpha}_1\delta L'_1+\delta L'_2$	$\alpha_1\delta L'_1+\delta L'_2$
1	−2.20254	−0.98163	−2.09514	−2.09514	−2.09067
0.85	−1.58094	−0.69512	−1.49362	−1.49362	−1.49136
0.707	−1.08813	−0.47348	−1.02266	−1.02266	−1.02160
0.5	−0.54115	−0.23284	−0.50574	−0.50574	−0.50548
0.3	−0.19412	−0.08294	−0.18079	−0.18079	−0.18075

例2，一双胶合望远物镜、口径 $D=30$ mm，焦距 $f'=136.206$ mm，结构参数如下

r	d	n	n_F	n_c	牌号
85.70	6.0	1.5263	1.532464	1.523714	K_{11}
−62.09	3.8	1.698748	1.715458	1.692212	ZF_{11}
−172.98					

类似例1，得表2。结论和例1一样，且沿轴放大倍率用 α 时偏差更大，说明面数越多，结构越复杂，克尔伯公式误差越大。表2中 $(\alpha_1)=\alpha_1\cdot\alpha_2$。(因用 $\bar{\alpha}$ 计算和 $\delta L'_{3\cdot\Sigma}$ 一样，表中没列出)

Table 2.

h/h_M	$\delta L'_1$	$\delta L'_2$	$\delta L'_3$	$\delta L'_{2\cdot\Sigma}$	$\alpha_1\delta L'_1+\delta L'_2$	$\delta L'_{3\cdot\Sigma}$	$(\alpha_1)\delta L'_1+\alpha_2\delta L'_2+\delta L'_3$
1	−1.64400	22.83806	−2.14554	17.00670	16.75979	0.00011	−0.04582
0.85	−1.18580	16.06016	−1.53681	11.84779	11.72276	−0.03359	−0.05966
0.707	−0.81928	10.88075	−1.05602	7.99693	7.90847	−0.04085	−0.05179
0.5	−0.40915	5.31974	−0.52422	3.86262	3.84837	−0.02981	−0.03248
0.3	−0.14715	1.88820	−0.18783	1.36369	1.36187	−0.01279	−0.01314

2.2　用克尔伯导出的 S_{-} 计算整个系统的球差是正确的。

克尔伯是在先假定转面倍率的基础上，将 $\delta L'_{j\cdot\Sigma}$ 去掉 $\alpha_{j-1}\delta L'_{(j-1)\cdot\Sigma}$ 后剩余部份视为折射面本身产生的球差，实际上它不等于该面球差，从而任何折射面的 $\frac{1}{2}S_{-}$ 除以 $n'_k u'_k \sin u'_k$ 不等于

该面产生的球差。但是，在不需分别计算各面球差值，只求系统总球差时，这种模糊处理是可以的，所以球差表示式

$$\delta L'_{k\cdot\Sigma} = \frac{n_1 u_1 \sin u_1}{n'_k u'_k \sin u'_k}\delta L_1 - \frac{1}{2n'_k u'_k \sin u'_k}\sum_1^K S_- \tag{4}$$

是正确的。

2.3 康拉弟(Conrady)的球差绝对分布式[3]

康拉弟给出下面二式(为忠实原文，球差用 LA' 表示)

$$LA' = (l' - L') = 2\frac{n}{n'}(L - r)\frac{l'L'}{rL}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(I' - u)\sin\frac{1}{2}(I - I')}{\cos\frac{1}{2}(I' - u')} \tag{5}$$

$$LA' = LA\frac{nl'L'}{n'lL} + 2\frac{n}{n'}(L - r)\frac{l'L'}{rL}\frac{\sin\frac{1}{2}(I' - u)\sin\frac{1}{2}(I - I')}{\cos\frac{1}{2}(I' - u')} \tag{6}$$

康拉弟认为(6)式将球差分为两部份，前半段表示入射光束原有球差乘以转面倍率，后半段表示此折射面本身产生的球差。应指出(6)式的后半段不等于(5)式的值，因为(5)式的 l' 对应于图1的 B^* 点，(6)式的 l' 对应于图1的 B'_0 点。所以转面倍率取 $\alpha = nl'L'/n'lL$ 也是不对的。

2.4 由S导出的 S_1 只能表征某折射面的初级球差，而不能反映初级球差贡献量。

对光学设计有实用价值的不是 S_- 而是 S_1。遗憾的是初级球差系数 S_1 只能表征折射面本身球差的初级量，而不是对系统的初级球差贡献量，以致使用PW法设计光学系统时会有较大偏差。为说明此问题，首先对单个折射面的球差进行分析。

3 单个折射面的球差

3.1 W 不变量

如图1所示，将折射面球心做为基点，A，A' 分别为某一孔径光线的物距和像距，a，a' 分别为近轴光线的物距和像距，则

$$WL = n'A'\sin u' = nA\sin u \tag{7}$$

$$Wl = n'a'u' = nau \tag{8}$$

称为 W 不变量。由 W 不变量可得出折射面的无球差、彗差点。将(7)式变为

$$A' = (n\sin u/n'\sin u')A = KA \tag{9}$$

当 K 为恒值时，A' 与孔径无关，不产生球差。

1) $K = 1$ 时，物在折射面顶点

2) $K = \frac{n^2}{n'^2}$ 时

① $I = I' = 0$，$u' = u$，物在球心。

② $I' = u$，$I = u'$，物在齐明点。

又由 $A'/A = y'/y$ 得

$$n'y'\sin u' = ny\sin u \tag{10}$$

当 K 为恒值时，y'/y 为定值，轴外点成像也是完善的，无彗差。(10)式即为正弦条件。

3.2 单个折射面本身产生的球差

由 W 不变量得

$$A' = n\sin u/n'\sin u')A;\qquad a' = (nu/n'u')a$$

令 $u = \sin u$, $A = a$, 则

$$\delta L' = A' - a' = [(u' - \sin u')/n'u'\sin u']nir \tag{11}$$

令 $E = nir(u' - \sin u')$ 则

$$\delta L' = E/n'u'\sin u' \tag{12}$$

4 折射面的球差贡献量

设光学系统由 K 个折射面构成, 光学系统总球差为

$$\delta L'_{k\cdot\Sigma} = [\bar{\alpha}_1]\delta L'_1 + [\bar{\alpha}_2]\delta L'_2 + \cdots + [\bar{\alpha}_{K-1}]\delta L'_{k-1} + \delta L'_k \tag{13}$$

设某折射面序号为 j, 则

$$[\bar{\alpha}_j] = \frac{n_{j+1}u_{(j+1)_0}\sin u_{j+1}}{n'_{j+1}u'_{(j+1)_0}u'_{j+1}}\cdot\frac{n_{j+2}u_{(j+2)_0}\sin u_{j+2}}{n'_{j+2}u'_{(j+2)_0}u'_{j+2}}\cdots\frac{n_k u_{k_0}\sin u_k}{n'_k u'_{k_0}u'_k} \tag{14}$$

(14)式与(2)式比较, 一是 $[\bar{\alpha}_j]$ 表示序号为 j 的折射面之转面倍率, 它是该折射面之后光学系统的沿轴放大率; 二是用 $\sin u_{j+1}$ 代替 $u_{(j+1)B}$, (近轴光线 u 角可任取)。因为 $u_{(j+1)_0} = u'_{j_0}$, $u_{j+1} = u'_j$, $n_{j+1} = n'_j$, 故

$$[\bar{\alpha}_j] = n_{j+1}u_{(j+1)_0}\sin u_{j+1}\frac{\sin u'_{j+1}}{u'_{j+1}}\cdots\frac{\sin u'_{k-1}}{u'_{k-1}}\cdot\frac{1}{n'_k u'_{k_0}u'_k} \tag{15}$$

(13)式两端分别乘以 $n'_k u'_{k_0}\sin u'_k$, 得

$$n'_k u'_{k_0}\sin u'_k\,\delta L'_{k\cdot\Sigma} = E_1\frac{u'_{1_0}}{u'_1}\cdot\frac{\sin u'_2}{u'_2}\cdots\frac{\sin u'_k}{u'_k} + \cdots + E_{k-1}\frac{u'_{(k-1)_0}}{u'_{k-1}}\cdot\frac{\sin u'_k}{u'_k} + E_k\frac{u'_{k_0}}{u'_k} \tag{16}$$

令 $M = n'_k u'_{k_0}\sin u'_k\,\delta L'_{k\cdot\Sigma}$; $M_j = E_j\dfrac{u'_{j_0}}{u'_j}\cdot\dfrac{\sin u'_{j+1}}{u'_{j+1}}\cdots\dfrac{\sin u'_k}{u'_k} = E_jK_jP_j$, 则

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_{K-1} + M_k = \sum_1^K M_j \tag{17}$$

称 M_j 为球差系数, 它反映折射面对光学系统的球差贡献量, 由各具物理意义的三项构成。

$$E_j = n_j i_j r_j(u'_j - \sin u'_j) \tag{18}$$

称为本征球差系数, 反映折射面本身产生的球差。

$$K_j = u'_{j_0}/u'_j \tag{19}$$

称为前球差传递系数, 反映折射面前面光学系统的球差状况。若前面光学系统球差为零(如第一个折射面), 则 $u'_{j_0} = u'_j$, $K_j = 1$。

$$P_j = \frac{\sin u'_{j+1}}{u'_{j+1}}\cdot\frac{\sin u'_{j+2}}{u'_{j+2}}\cdots\frac{\sin u'_k}{u'_k} \tag{20}$$

称为后球差传递函数, 反映折射面后面光学系统的球差状况。若后面光学系统球差为零(如最后一面), 则 $P_j = 1$。

5 初级本征球差系数和球差传递函数

5.1 初级本征球差系数 e

(18)式去掉脚标，令 $u = \sin u$，则 $\sin I = i$；$\sin I' = i'$ 又因 $\Phi = u + I$；$u' = \Phi - I'$，经三角函数变换，展成级数去掉高次项，用 e 代替 E，变为

$$e = \frac{1}{2}\ln ui(i' - i)(i' - u) \tag{21}$$

显然，所谓的初级球差系数 S_1 对应于本文中的 e(二倍关系)，e 称为初级本征球差系数，所以 S_1 只能表征折射面本身产生的初级球差。

5.2 初级球差传递系数

K_j 和 P_j 统称球差传递系数。K_j 不能再简化，P_j 的初级量用 p_j 表示，则

$$p_j = \frac{1}{2}\left(i'_{j+1} - \frac{u_{j+1}}{u'_{j+1}}i_{j+1}\right)(u_{j+1} + i_{j+1}) + \cdots + \frac{1}{2}\left(i'_K - \frac{u_K}{u'_K}i_K\right)(u_K + i_K) + 1 \tag{22}$$

用 m_j 表示折射面的初级球差系数，则

$$m_j = e_j k_j p_j \tag{23}$$

显然，m_j 并非全由初级量构成，三项相乘会产生高级量，这种高级量称为衍生高级量。

结 语 只有正确选择转面倍率，才能揭示折射面对光学系统的球差贡献量。全面评价此贡献量，必须考虑 E_j、K_j 和 P_j 三项因素。由于 S_- 并非真实反映此贡献量，由 S_- 导出的 S_1 只反映折射面本身初级球差。可用 E_j 和 l_j 之差表征折射面本身产生的高级球差，称之为本征高级球差系数值。

参 考 文 献

[1] 张以谟主编， 应用光学(修订本). 北京，机械工业出版社，1988·226~ 227
[2] 王之江， 光学设计理论基础. 北京，科学出版社，1965·17~ 18
[3] A.E.Conrady， *Applied Optics and Optical Design.*，London，Oxford Univesity Press，1929·80~ 81

Drawback in the Transfer-Surface Magnification and Aberration-Coefficient Formulas

Wang Peng Li Runshun
(*The Opto-Electronic Department of the Aero-Space College of Harbin Institute of Technology, Harbin* 150006)
Wang Zhijian
(*The Opto-Electronic Department of Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Changchun* 130022)
(Received 4 May 1995; revised 7 August 1995)

Abstract The paper provides a new understanding and correcting suggestions towards the traditional abrration theory. The drawback in the transfer-surface magnification and abrration-coefficient formulas is pointed out.

Key words spherical aberration， comatic aberration， sine condition.