第 16 卷 第 10 期 光 学 学 报 Vol. 16, No. 10
1996 年 10 月 ACTA OPTICA SINICA October, 1996

非傍轴光束的光束质量因子. II 特性分析*

曹 清 邓锡铭
(高功率激光物理国家实验室, 中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 使用傅里叶变换和施瓦兹不等式证明: 非傍轴标量光束的 M^2 因子存在有一个只能无限趋近、却永远都不可能达到的下限 1; 并对一些与此相关的问题进行了讨论。

关键词 非傍轴光束, M^2 因子, 二阶矩理论。

1 引 言

近年来, Siegman 提出的二阶矩理论和 M^2 因子概念, 为统一描述任意傍轴光束的传输规律和光束质量提供了一个合理的方法[1~3]。但是由于二阶矩方法是建立在光传输的傍轴标量理论基础上的, 它一般只能适用于傍轴标量光束, 而不能适用于非傍轴光束[3~4]。

最近, 作者在文献[5]中已经将 Siegman 的二阶矩方法推广到了非傍轴的标量光束, 证明了非傍轴标量光束的光强二阶矩随 z 的变化也仍然成抛物线性变化, 并由此而进一步地定义了非傍轴标量光束的 M^2 因子。

本文将在文献[5]的基础上, 进一步证明非傍轴标量光束的 M^2 因子存在有一个只能无限趋近、却永远都不可能达到的下限 1, 并对一些相关的问题进行讨论。

2 M^2 因子存在有一个下限

众所周知, 真空中的单色标量光场满足稳态亥姆霍兹波动方程

$$\nabla^2\Phi + k^2\Phi = 0 \tag{1}$$

式中 Φ 为复振幅光场分布函数, 它的解一般可表示为

$$\Phi = \Phi_0 \exp(ikL) \tag{2}$$

其中 Φ_0 为振幅, kL 为位相, L 为准程函(为了与几何光学中的程函概念相区别), 它们都是空间坐标(x, y, z) 的实函数。由文献[5] 可知, 在考虑了时间平均能流密度的矢量特性的情况下, 对于标量光场来说, 其垂直于光束传输轴(z 轴) 的横截面上的精确光强值可表示为

$$I = \Phi_0^2 \frac{\partial L}{\partial z} \tag{3}$$

在(3)式的基础上, 文献[5]把 Siegman 的二阶矩方法推广到了非傍轴标量光束。其光束

* 国家惯性约束聚变委员会资助课题。
收稿日期: 1995 年 12 月 8 日; 收到修改稿日期: 1996 年 2 月 5 日

质量因子的具体表达式为

$$M_x^4 = 16\pi^2\,\overline{x_{ox}^2}\,\overline{f_x^2},\qquad M_y^4 = 16\pi^2\,\overline{y_{ox}^2}\,\overline{f_y^2} \tag{4}$$

式中 $\overline{x_{ox}^2}$、$\overline{y_{oy}^2}$ 分别为$\overline{x^2}$、$\overline{y^2}$ 的最小值；而$\overline{f_x^2}$、$\overline{f_y^2}$ 则分别为

$$\overline{f_x^2} = \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{f_x^2\,|\Psi(f_x, f_y)|^2}{\sqrt{1-\lambda^2 f_x^2-\lambda^2 f_y^2}}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y,\qquad \overline{f_y^2} = \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{f_y^2\,|\Psi(f_x, f_y)|^2}{\sqrt{1-\lambda^2 f_x^2-\lambda^2 f_y^2}}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{5}$$

注意(5)式中的积分限实际上应为$f_x^2+f_y^2<\frac{1}{\lambda^2}$，但由于已经假定了瞬逝波为0，所以为了表述上的方便，将积分限拓展到了无穷大。以下如无特殊说明，都作此理解。

现在，用傅里叶变换和施瓦兹不等式来进一步地证明 M_x^2、M_y^2 都大于 1。利用(2)式，可以把(3)式变为

$$I = \frac{i}{2k}\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial z} - \phi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{6}$$

利用(6)式，则可把 $\overline{x^2}$ 变为

$$\overline{x^2} = \frac{i}{2k}\iint_{-\infty}^{\infty}x^2\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial z} - \phi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= A + A^* \tag{7}$$

其中

$$A = \frac{i}{2k}\iint_{-\infty}^{\infty}(x^2\phi)\left[\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]^*\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{8}$$

在傅里叶分析中，有一个重要的帕塞伐定理，它的具体形式为

$$\iint_{-\infty}^{\infty}g^*(x, y)h(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty}G^*(f_x, f_y)H(f_x, f_y)\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{9}$$

其中 $G(f_x, f_y)$、$H(f_x, f_y)$ 分别为 $g(x, y)$、$h(x, y)$ 的傅里叶变换式，即

$$G(f_x, f_y) = F[g(x, y)],\qquad H(f_x, f_y) = F[h(x, y)] \tag{10}$$

利用傅里叶变换式的定义，可以得到

$$F\left[\frac{\partial\phi}{\partial z}\right] = \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial z}\exp[-i2\pi(f_x x + f_y y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\iint_{-\infty}^{\infty}\phi\exp[-i2\pi(f_x x + f_y y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\partial\Psi}{\partial z} \tag{11}$$

由傅里叶光学可知，在忽略了瞬逝波的近似下，Ψ 的传输规律为[6~7]

$$\Psi_z = \Psi_0\exp(ikz\Delta) \tag{12}$$

其中

$$\Delta = \sqrt{1-\lambda^2 f_x^2-\lambda^2 f_y^2} \tag{13}$$

由(12)式则可得到

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = ik\Delta\Psi \tag{14}$$

利用(9)～(14)式以及傅里叶变换的性质，可把 A 表示为

$$A = \frac{-1}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\Delta\Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial f_x^2}\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{15}$$

利用分步积分和 $|\Psi(f_x, f_y)|^2$ 在 $f_x^2 + f_y^2 \geqslant \frac{1}{\lambda^2}$ 时为 0 的边界条件，则可把 A 和 A^* 变为

$$A = \frac{1}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\Delta\left|\frac{\partial\Psi}{\partial f_x}\right|^2\mathrm{d}f_x\,\mathrm{d}f_y + \frac{1}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial f_x}\frac{\partial\Delta}{\partial f_x}\,\mathrm{d}f_x\,\mathrm{d}f_y \tag{16}$$

$$A^* = \frac{1}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\Delta\left|\frac{\partial\Psi}{\partial f_x}\right|^2\mathrm{d}f_x\,\mathrm{d}f_y - \frac{1}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial f_x}\frac{\partial\Delta}{\partial f_x}\,\mathrm{d}f_x\,\mathrm{d}f_y + D \tag{17}$$

其中 D 为

$$D = \frac{-1}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}|\Psi(f_x, f_y)|^2\frac{\partial^2\Delta}{\partial f_x^2}\mathrm{d}f_x\,\mathrm{d}f_y \tag{18}$$

把(16)～(17)式代入(7)式，可以得到

$$\overline{x^2} = C + D \tag{19}$$

其中 C 为

$$C = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\Delta\left|\frac{\partial\Psi}{\partial f_x}\right|^2\mathrm{d}f_x\,\mathrm{d}f_y \tag{20}$$

把(13)式代入(18)式，并经过逐步推导，最后可以得到

$$D = \frac{\lambda^2}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\lambda^2 f_y^2)|\Psi(f_x, f_y)|^2}{(\Delta)^3}\mathrm{d}f_x\,\mathrm{d}f_y \tag{21}$$

由(21)式可以看出，在忽略了瞬逝波的情况下，D 恒是一个大于 0 的正实数。由此可以得到

$$\overline{x^2} > C \tag{22}$$

由于任何一个复函数都可以表示为复指数的形式，于是可以把空间频谱函数 $\Psi(f_x, f_y)$ 表示为“振幅”和“位相”的形式

$$\Psi = \Psi_0\exp(i\varphi) \tag{23}$$

其中 Ψ_0、φ都为 f_x、f_y、z 的实函数。利用(23)式可以得到

$$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial f_x}\right|^2 = \left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial f_x}\right)^2 + \Psi_0^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial f_x}\right)^2 \geqslant \left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial f_x}\right)^2 \tag{24}$$

利用(22)式、(24)式、(20)式以及(5)式，并使用施瓦兹不等式和分步积分，则可得到

$$\overline{x^2}\,\overline{f_x^2} > \frac{1}{4\pi^2}\left[\iint_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\Delta}\frac{\partial\Psi_0}{\partial f_x}\right)^2\mathrm{d}f_x\,\mathrm{d}f_y\right]\left[\iint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{f_x\Psi_0}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\mathrm{d}f_x\,\mathrm{d}f_y\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{4\pi^2}\left[\iint_{-\infty}^{\infty}f_x\Psi_0\frac{\partial\Psi_0}{\partial f_x}\mathrm{d}f_x\,\mathrm{d}f_y\right]^2 = \frac{1}{16\pi^2}\left[\iint_{-\infty}^{\infty}\Psi_0^2\,\mathrm{d}f_x\,\mathrm{d}f_y\right]^2 \tag{25}$$

利用归一化条件、(6)式、(14)以及帕塞伐定理，可以得到

$$\iint_{-\infty}^{\infty}I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{i}{2k}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi\frac{\partial\Phi^*}{\partial z} - \Phi^*\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta \Psi_0^2 \, \mathrm{d}f_x \, \mathrm{d}f_y = 1 \tag{26}$$

由于在忽略了瞬逝波的情况下，Δ 是一个恒小于 1 的正实数，所以由(26)式可以得到

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_0^2 \, \mathrm{d}f_x \, \mathrm{d}f_y > \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta \Psi_0^2 \, \mathrm{d}f_x \, \mathrm{d}f_y = 1 \tag{27}$$

把(27)式代入(25)式，则可得到

$$\overline{x^2}\,\overline{f_x^2} > \frac{1}{16\pi^2} \tag{28}$$

由于(28)式具有普遍的意义，它可以适用于任何一个垂直于 z 轴的横截面，因而它也完全适用于光腰面。由此把(28)式代入(4)式，则可得到

$$M_x^2 > 1 \tag{29}$$

对于 y 方向，采用类似的方法，也可证明

$$M_y^2 > 1 \tag{30}$$

至此，得到了一个重要的结论：非傍轴标量光束的光束质量因子 M_x^2、M_y^2 都大于 1，即它们都存在有一个永远都不可能达到的下限 1。

3 结论与讨论

1) 由上文的推导可知，非傍轴标量光束的 M^2 因子都大于 1，这就意味着任何标量光束的 M^2 因子都不可能达到它的下限 1。可以证明，只有在光腰面处具有高斯型振幅分布(及均匀位相分布)，且光斑半径趋向于无穷大的标量光束的 M^2 因子才能无限地趋向于 1(但即使是这样，它也永远不可能精确地为 1)。这一点是和傍轴近似下所得到的结果不相同的，在后一种情况下，M^2 因子的取值范围为 $M^2 \geqslant 1$，而具有任意光斑半径的所有基模高斯光束的 M^2 因子都为 1。

2) 由上节的推导可知，阻碍(29)式取等号的一个原因在于 D 是一个大于 0 的正实数。对(21)式作傍轴近似，即取 $\lambda^2 f_x^2 + \lambda^2 f_y^2 \ll 1$，则可得到傍轴近似下 D 的极限值为

$$D_L = \lambda^2 / 8\pi^2 \tag{31}$$

它具有波长平方的量级。显然，在傍轴近似下，$\overline{x^2} \gg \lambda^2$，这就意味着 D 与 C 相比可以忽略不计。在此情况下，(22)式中的“>”号可近似地变为=号，即

$$\overline{x^2} = C \tag{32}$$

3) 阻碍(29)式取等号的另一个原因在于不等式(27)式。在傍轴近似的条件下，由于 $\Delta \approx 1$，这就使得(27)式可以近似地取等号。综合 2) 与 3) 的讨论可知，在傍轴近似的情况下，阻碍(29)式取等号的两个障碍都已消除，此时(29)式中的“>”号可以近似地被“$\geqslant$”号所代替。而在此情况下，与 $M^2 \approx 1$ 相对应的傍轴光束就是基模高斯光束。

4) M^2 因子本质上反映的是光腰半径和发散度的乘积，而这个乘积可以认为是衍射极限的倍数。在傍轴近似的情况下，它是和动量与位置的测不准关系相对应的(至少在表述形式上是这样的，因为傍轴标量光传输方程与量子力学中的薛定谔方程在形式上是相同的)[8]；但是对于非傍轴标量光束来说，M^2 因子概念是否仍然反映了动量与位置的测不准关系，则还需进行进一步的研究。

参 考 文 献

[1] A.E.Siegman, New Developments in Laser Resonators. *Proc. SPIE, Optical Resonators*, 1990, **1224**: 2~20

[2] P.A.Belanger, Beam propagation and the *ABCD* ray matrices. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(4): 196~198

[3] H.Weber, Some historial and technical aspects of beam quality. *Opt. & Quanton. Electr.*, 1992, **24**: S861~S864

[4] M.A.Porras, The best quality optical beam beyond the paraxial approximation. *Opt. Commun.*, 1994, **111**(3/4): 338~349

[5] 曹 清, 邓锡铭, 郭 弘, 非傍轴光束的光束质量因子: I 定义. 光学学报, 1996, **16**(9): 1217~1222

[6] 黄婉云, 傅里叶光学教程. 北京师范大学出版社, 1985 年 5 月

[7] J.W.顾德门, 傅里叶光学导论. 科学出版社, 1979 年 4 月

[8] T.F.Johnston, Jr. M^2 concept characterizes beam quality. *Laser Focus World*, 1990, (5): 173~183

Optical Beam Quality Factor of Nonparaxial Light Beams: II Property Analysis

Cao Qing Deng Ximing

(*National Laboratory of High Power Laser and Physics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)

(Received 8 December 1995; revised 5 February 1996)

Abstract By using the Fourier transform method and the Schwarz inequality, the relation $M^2 > 1$ is proved, where M^2 is the optical beam quality factor of non-paraxial scalar light beam. And furthermore, some other aspects of the second moments theory are discussed.

Key words nonparaxial light beam, M^2 factor, second moments theory.