

带有分割遮拦干涉图的计算机分析

白 剑 刘 承 杨国光 程上彝

(浙江大学国家现代光学仪器实验室, 杭州 310027)

摘 要 提出一种干涉图计算机分析的新方法, 克服了传统处理法的限制, 能对视场遮拦(例如 RC 光学系统的遮拦)所引起的带有缺块或被分割的干涉图进行计算机分析与处理。该方法成功地应用于数字波面的实时检测技术中, 已在 SPG-Ⅰ型激光数字波面干涉仪中得到验证和应用。

关键词 波面位相, 子孔径。

1 引 言

在动态干涉图的计算机分析中, 位相通过求反正切函数获得, 其值位于 $[-\pi, \pi]$ 区间内^[1], 这样所得到的位相分布是不连续的, 而连续的二维位相分布则通过位相连续化处理 (Phase unwrapping) 得到^[2]。实际的干涉图形状复杂, 或中间有空间, 或因条纹过密引入噪声, 这些都会导致常规连续化处理的失败。一些连续化算法, 如 Jeffrey J. Gierloffd 的区域化处理^[3], Donald J. Bone 的二维连续化处理^[4]等解决了上述问题。但对于带有遮拦物的干涉图, 特别是在检测实际的光学系统(例如典型的 RC 系统, 折反射系统等), 尚未有较好的算法。现有的数字波面干涉仪, 如美国的 Zygo (Mark III) 等仪器, 未能对这类干涉图进行处理。本文给出了一种简单的处理算法, 并在实际应用中获得成功。

2 位相连续化处理^[2]

根据采样定理, 采样频率至少是条纹分布空间频率的两部, 故任意两个相邻点之间的相位差不超过 π , 于是可从任一点 P 出发, 比较与之相邻的位相, 若位相差超过 π , 则相邻点为跳变点, 对它的位相进行调整, 让位相 2π 或减少 2π 的整数倍, 使两点位相差在 π 以内。然后, 从这些相邻点出发, 重复该处理直至所有的点都处理完毕, 则可构造出连续波面位相 $\Phi(x, y)$ 。设 $\phi(x, y)$ 为实际波面位相, 由上述过程可知

$$\Phi(x, y) = \phi(x, y) + [\Phi(x_r, y_r) - \phi(x_r, y_r)]$$

因 P 为出发点, 故 $\phi(x_r, y_r)$ 为通过求反正切函数得到的位相, 则出发点 P 处的实际位相为

$$\phi(x_r, y_r) = \Phi(x_r, y_r) + 2\pi m \quad (m \text{ 为整数})$$

故实际波面和实际波面位相为

$$W(x, y) = W'(x, y) + m\lambda, \quad \Phi(x, y) = \Phi'(x, y) + 2\pi m$$

这里, $W(x, y) = \Phi(x, y)/K$, $W'(x, y) = \Phi'(x, y)/K$, $K = 2\pi/\lambda$ 。

所以实际波面即为连续化处理得到的波面加上或减去波长正整数倍的平移。

3 基本原理

设干涉图被分割遮拦成 n 个区域, 每一个区域称为一个子孔径, 对这 n 个子孔径分别进行连续化处理, 得到 $W'_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 那么实际的子孔径波面

$$W_i(x, y) = W'_i(x, y) + r_i\lambda \quad (r_i \text{ 为整数}, i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$\text{令} \quad l_i(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{当}(x, y) \in \text{第}i\text{个子孔径时} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则经连续化处理得到的波面可表示为

$$W'(x, y) = \sum_{i=1}^n W'_i(x, y)l_i(x, y) \quad (2)$$

实际波面可表示为

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^n W_i(x, y)l_i(x, y) \quad (3)$$

当实际波面 $W(x, y)$ 包含有平移, 倾斜和离焦时

$$W(x, y) = P + K_x x + K_y y + D(x^2 + y^2) + W_0(x, y) \quad (4)$$

(1)式代入(3)式, 得

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{i=1}^n [W'_i + r_i\lambda]l_i(x, y) \\ &= W'(x, y) + \lambda \sum_{i=1}^n r_i l_i(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

由(4)式, (5)式, 得

$$W'(x, y) = W_0(x, y) + P - \lambda \sum_{i=1}^n r_i l_i(x, y) + K_x x + K_y y + D(x^2 + y^2)$$

令 $P - \lambda r_1 = P_1$, $r_1 - r_i = m_i$ ($i = 2, \dots, n$), 可得

$$\begin{aligned} W'(x, y) &= W_0(x, y) + P_1 l_1(x, y) + \sum_{i=2}^n (P_1 + \lambda m_i) l_i(x, y) \\ &\quad + K_x x + K_y y + D(x^2 + y^2) \quad (n \geq 2) \end{aligned} \quad (6)$$

式中 P_1 是第一个子孔径的平移, $p_1 + \lambda m_i$ 是第 i 个孔径的平移 (m_i 为整数)。 $KW'(x, y)$ 是包含倾斜及离焦时的波面位相; $KW_0(x, y)$ 是消除了这些误差后的波面位相。 K_x , K_y 为 x , y 方向的倾斜系数, D 为离焦系数。由上式可知, 这 n 个子孔径存在如下关系: 所有子孔径具有相同的倾斜和离焦; 任意两个子孔径间的平移之差是波长 λ 的整数倍。完成对子孔径间平移之差的求解是解决问题的关键。

若把位于遮拦物边缘且属于不同子孔径的距离很近的两个点组成相关点对, 则在一般情况下, 对所有的相关点对 (i, j)、($j = R(i)$)、 $W_0(x_i, y_i)$ 与 $W_0(x_j, y_j)$ 相差比较小, 因此, 若令 $P_i = P_1 + \lambda m_i$ ($k = 2, \dots, n$), M 为有效点总数, 则为使各个子孔径间完全正确地连接起来, 必须使 $P_1, \dots, P_i, K_x, K_y$ 及 D 满足

$$\delta_{RP} = \min_{\substack{i=1 \\ R(i) \neq 0}}^M [W_0(x_i, y_i) - W_0(x_{R(i)}, y_{R(i)})]^2 \quad (7)$$

同时为正确消除装调误差, 也必须满足

$$\delta_F = \min \sum_{i=1}^M \{ [W_n(x_i, y_i)]^2 \sum_{j=1}^n [\alpha_j l_j(x_i, y_i)] \} \quad (8)$$

综合上述两方面因素，令

$$\delta = \min \delta(P_1, \dots, P_n, K_x, K_y, D) = \delta_F + \alpha_{RP} \delta_{RP} \quad (9)$$

这里， $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{RP}$ 为权系数。令

$$\begin{aligned} \frac{d\delta(P_1, \dots, P_n, K_x, K_y, D)}{dP_i} &= 0, \\ \frac{d\delta(P_1, \dots, P_n, K_x, K_y, D)}{dK_x} &= 0, \\ \frac{d\delta(P_1, \dots, P_n, K_x, K_y, D)}{dK_y} &= 0, \\ \frac{d\delta(P_1, \dots, P_n, K_x, K_y, D)}{dK_\nu} &= 0, \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (10)$$

由(6)、(9)、(10)式可得到如下形式的法方程组

$$(A_F + \alpha_{RP} \cdot A_{RP})X = (b_F + b_{RP})$$

其中， $X = (P_1, \dots, P_n, K_x, K_y, D)^T$

若记 $(f_1(x, y), f_2(x, y)) = \sum_{i=1}^M f_1(x_i, y_i) \cdot f_2(x_i, y_i)$ ， $N_i (i = 1, \dots, n)$ 为各个子孔径的数据点数，则 A_F, b_F 可表示为

$$A_F = \begin{bmatrix} \alpha_1 N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1(x, l_1(x, y)) & a_1(y, l_1(x, y)) & a_1[x^2 + y^2, l_1(x, y)] \\ & \alpha_2 N_2 & 0 & \dots & 0 & a_2(x, l_2(x, y)) & a_2(y, l_2(x, y)) & a_2[x^2 + y^2, l_2(x, y)] \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_n N_n & a_n(x, l_n(x, y)) & a_n(y, l_n(x, y)) & a_n[x^2 + y^2, l_n(x, y)] \\ & & & & & \sum_{j=1}^n a_j(x^2, l_j(x, y)) & \sum_{j=1}^n a_j(xy, l_j(x, y)) & \sum_{j=1}^n a_j[x^2 + y^2, l_j(x, y)] \\ & & & & & & \sum_{j=1}^n a_j(y^2, l_j(x, y)) & \sum_{j=1}^n a_j[x^2 + y^2, l_j(x, y)] \\ & & & & & & & \sum_{j=1}^n a_j[(x^2 + y^2)^2, l_j(x, y)] \end{bmatrix}$$

$$b_F = \{ a_1[W(x, y), l_1(x, y)], \dots, a_n[W(x, y), l_n(x, y)] \sum_{j=1}^n a_j[xW'(x, y), l_j(x, y)] \sum_{j=1}^n a_j[yW'(x, y), l_j(x, y)] \sum_{j=1}^n a_j[(x^2 + y^2)W'(x, y), l_j(x, y)] \}^T$$

设相关点对总数为 N_{RP} ，则

$$A_{RP} = \sum_{i=1}^{N_{RP}} A_{RP_i}, \quad b_{RP} = \sum_{i=1}^{N_{RP}} b_{RP_i}$$

设第 i 相关点对为 (i_2, i_1) ($i_2 = R(i_1)$)，且点 $(x_{i_1}, y_{i_1}) \in$ 第 m 个子孔径，点 $(x_{i_2}, y_{i_2}) \in$ 第 l 个子孔径，记

$$\begin{aligned} r_i &= (x_{i_1}^2 + y_{i_1}^2) - (x_{i_2}^2 + y_{i_2}^2), & \Delta x_i &= x_{i_1} - x_{i_2} \\ \Delta y_i &= y_{i_1} - y_{i_2}, & \Delta W_i &= W'(x_{i_1}, y_{i_1}) - W'(x_{i_2}, y_{i_2}) \end{aligned}$$

则

$$A_{RP} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{第 } m \text{ 列} & \text{第 } l \text{ 列} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 & 0 & \Delta x_i & \Delta y_i & r_i \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & -\Delta x_i & -\Delta y_i & -r_i \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \Delta x_i^2 & \Delta x_i \Delta y_i & \Delta x_i r_i \\ & & & & & & \Delta y_i^2 & \Delta y_i r_i \\ & & & & & & & r_i^2 \end{bmatrix} \\ & \begin{matrix} \text{第 } m \text{ 列} \\ \text{第 } l \text{ 行} \\ \vdots \end{matrix} \end{matrix}$$

$$b_{RP} = [0 \quad \Delta W_i \quad 0 \quad -\Delta W_i \quad 0 \quad \Delta W_i \Delta x_i \quad \Delta W_i \Delta y_i \quad \Delta W_i r_i]^T$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \text{第 } m \text{ 项} & \text{第 } l \text{ 项} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \end{matrix}$$

A_P , A_{RP} 为 $(n + 3) \times (n + 3)$ 对称正定矩阵, 这里仅给出它们的上半角矩阵。 A_P 包含了波面拟合的信息, 而 A_{RP} 包含了各个子孔径间的相关连接信息。系数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{RP}$ 按下列比例选定:

$$\alpha_1; \dots; \alpha_n; \alpha_{RP} = N_{RP} S_n; \dots; N_{RP} S_1 \dots (S_1 + \dots + S_n)$$

这里, S_1, \dots, S_n 为各个子孔径的数据点数, N_{RP} 为相关点对的总数。用改进平方根法求解上述法方程组可获得所求参数, 求得 P_i 后, m_i 就能确定, 不仅完成各个子孔径间的连接, 也得到了倾斜与离焦的装调误差, 消去这些误差, 就完成对分割遮拦干涉图的处理。

4 实验结果及讨论

算法在 IBM-PC 系列机上用 C 语言编程实现, 并已应用于 SPG-I 型激光数字波面干涉仪。为测试其运算效率及精度, 在被测物前引入遮拦物(如图 1 所示), 进行如下实验:

1) 改变遮拦物的形状, 产生不同数目的子孔径, 实验表明, 运算时间与子孔径数目无关。在主频为 33 MHz 带协处理器的 386 微机上仅需 7 sec 就能完成。这是因为运算时间主要取决于数据点数, 子孔径数目的增加虽然导致法方程组的增大, 但方程组的求解在整个运算过程中所占时间很少。因此该算法有较高的运算效率。

Table 1. Relationship between E_m & obstacle coefficients

K_i	PTS	$E_m(\lambda)$
0.01	6964	0.002
0.04	6728	0.003
0.10	6336	0.006
0.18	5788	0.010
0.28	5092	0.014
0.40	4224	0.021
0.55	3192	0.030
0.71	2020	0.039

Total No. of PTS absence of obstacle: 7033

2) 为考查遮拦物大小对测量精度的影响, 定义遮拦系数为:

$$K_z = S_z / S_T$$

式中 S_z 为被遮拦部分的面积, S_T 为无遮拦物时的整个孔径面积。引入不同大小的遮拦物, 把每次测得的结果用相减程序与无遮拦物时的测量结果相比较, 所得的结果如表 1 所示, 图 2 是与表对应的曲线图。从图表中可知, 测量精度随着遮拦物的增大而降低。当遮拦物超过整个全孔径的 70% 时, 测量精度低于 $\lambda/25$ 。这是因为除了温度影响, 大气扰动等因素外, 一方面遮拦物越大, 边缘衍射效应越严重, 误差也越大; 另一方面遮拦物的

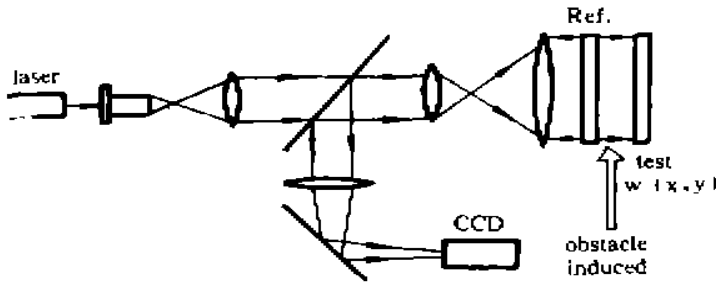


Fig. 1 Obstacle is induced before the tested optics as shown in the figure

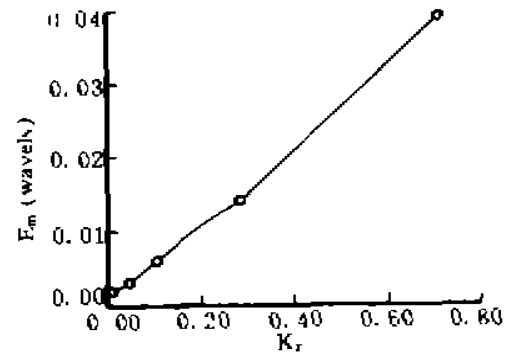


Fig. 2 The relationship between E_m and the obstacle coefficients

增大导致数据点数的减少，当减少到一定程度时，会影响倾斜、离焦等装调误差的自动消除。但当遮拦物不超过全孔径的 20% 时，能获得满意的精度，达到 $\lambda/100$ ；不超过全孔径的 40% 时，达到 $\lambda/50$ 。在实际测量中，遮拦系数一般不大于 0.4，故测量精度能保证 $\lambda/50$ 。

3) 在一块 $\phi 80$ mm 的平晶前引入一个“十”字型遮拦物，测量结果如图 3(a) 所示，然后去掉遮拦物，再测量一次，得到测量结果如图 4(a) 所示，最后用相减程序对上述两次结果进行相减，得到如图 5 所示的结果。图 3(b) 和图 4(b) 分别为对应的等高图。从图中可知，在该次测量中，误差若以最大面形误差 (E_m) 作判据，达到 $\lambda/100$ 。可见该算法有较高精度，可以进行实时处理。

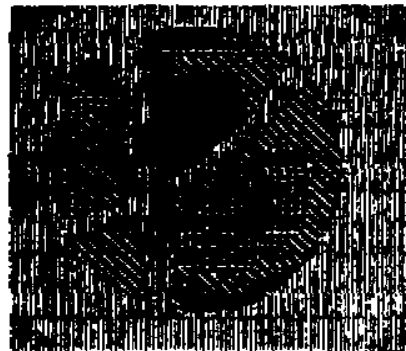


Fig. 3 Wavefront when obstacle is induced

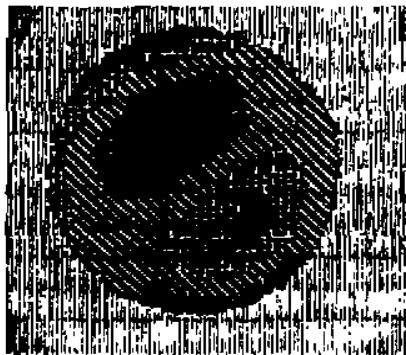


Fig. 4 Wavefront absence of obstacle

4) 该算法已应用于实际测量中，图 6 是对一实际的视场遮拦的冷光系统所测得的波像差，为该光学系统的评价提供了可靠的数据材料。



Fig. 5 Wavefront obtained by abstracting the wavefront as shown in Fig. 4 from the one in Fig. 4

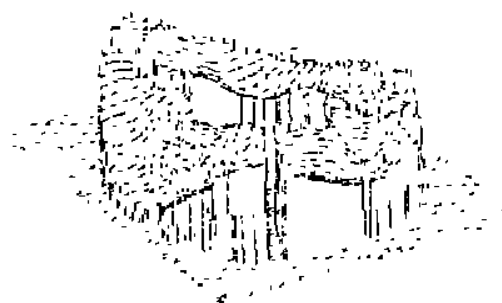


Fig. 6 Wavefront obtained from the actual optical system by the algorithm presented

结 论 本文提出了一种对带有分割遮拦干涉图的计算机分析的算法, 并已编程应用于 SPG- I 型激光数字波面干涉仪, 具有运算效率高, 精度可靠等优点, 有一定实用价值。

参 考 文 献

- [1] A. Spik, D. W. Robinson, Investigation of the cellular automata method for phase unwrapping and its implementation on an array processor, *Opt. & Laser Eng.*, 1991, 14 : 25~37
- [2] Eugene R. Cochran, Limitations of Phase-Measuring interferometry for surface characterization and testing; a review, *Proc. SPIE*, 1992, 1776 : 151~157
- [3] J. J. Gierloff, Phase unwrapping by regions. in Current Developments in Optical Engineering II, R. R. Fischer, W. J. Smith, eds, *Proc. SPIE*, 1987, 818 : 2~9
- [4] Donald J. Bone, Fourier fringe analysis; the two-dimensional phase unwrapping problem. *Appl. Opt.*, 1991, 30 (25) : 3627~3632

Computer Analysis of Interferogram with Obstacles

Bai Jian Liu Cheng Yang Guoguang Cheng Shangyi

(National Laboratory of Optical Instruments, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

(Received 15 July 1994; revised 13 January 1995)

Abstract A new algorithm for analyzing interferogram is presented. It overcomes the limitations of the traditional method and can process the broken interferogram resulted from the obstacles in the tested optical system such as RC telescope system. The new method performs well in real-time testing of the wavefront and has been successfully adopted in SPG- I digital wavefront interferometer.

Key words wavefront, subaperture.