

# 部分相干离焦散斑照相的统计理论

王开福

(扬州大学工学院力学教研室, 扬州 225001)

**摘 要** 运用散斑统计理论, 探讨了部分相干离焦散斑照相的统计规律, 指出了影响条纹质量的各种因素, 并给出了实验验证。

**关键词** 部分相干离焦散斑, 位移导数, 统计分析。

## 1 引 言

文献[1]详细探讨了激光离焦散斑照相的统计规律。然而至今还未见报道用统计光学的理论对部分相干离焦散斑照相进行统计研究的工作。本文依据散斑统计理论, 对部分相干离焦散斑照相的统计规律进行了探讨, 得到了实现部分相干离焦散斑照相的一般条件。

## 2 理论分析

### 2.1 信息记录

图1是光学系统示意图。设  $N$  个物点经系统后交于像面上同一点, 则点扩散函数为

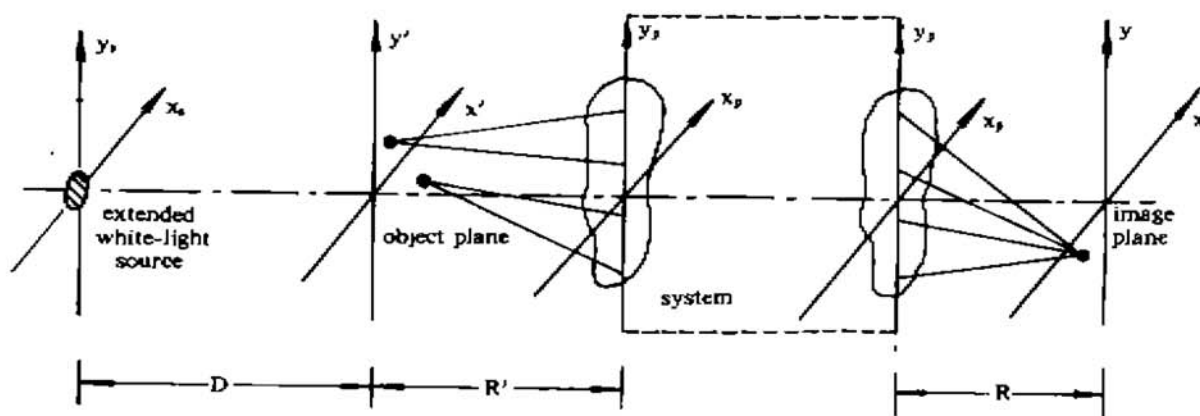


Fig. 1 Optical system

$$\left. \begin{aligned} h(X, X', \lambda) &= \sum_{a=1}^N h_a(X, X', \lambda) \\ X' &= 2\pi x' / R', \quad X = 2\pi x / R \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $x'$  和  $x$  分别为物面和像面的实际坐标矢量,  $X'$  和  $X$  分别为相应的换算坐标矢量,  $h_a(X, X', \lambda)$  为对应于第  $m$  个物点的点扩散函数, 表示为<sup>[2]</sup>

$$h_m(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \lambda) = \left. \int \bar{P}_m(\lambda \mathbf{x}_0) \exp[-i(\mathbf{X} + \mathbf{X}') \cdot \mathbf{x}_0] d^2 \mathbf{x}_0 \right\} \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_r / \lambda, \quad m = 1, 2, \dots, N$$

式中  $\bar{P}_m(\lambda \mathbf{x}_0)$  为对应于第  $m$  个物点的广义光瞳函数。

物体变形前, 首先进行第一次曝光, 根据文献[3], 记录到的光强分布为

$$I_1(\mathbf{X}) = \left. \int d\lambda \int g(\boldsymbol{\alpha}, \lambda) |A_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda)|^2 d^2 \boldsymbol{\alpha} \right\} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x}_s / D$$

式中  $g(\boldsymbol{\alpha}, \lambda)$  为光源强度分布函数,  $A_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda)$  为光源上一点  $\boldsymbol{\alpha}$  处辐射出的波长为  $\lambda$  的完全相干光照射时在像面上接收到的复振幅, 表示为

$$A_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda) = \int \exp\{i2\pi Z(\mathbf{X}') [n(\lambda) - 1] / \lambda\} h(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \lambda) \exp(-iR' \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{X}' / \lambda) d^2 \mathbf{X}' \quad (4)$$

式中  $n$  为漫射物体折射率(漫反射  $n(\lambda) = -1$ ),  $Z(\mathbf{X}')$  为漫射物面的高度函数, 结合(1)式, 得

$$A_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda) = \sum_{m=1}^N \int \exp\{i2\pi Z(\mathbf{X}') [n(\lambda) - 1] / \lambda\} h_m(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \lambda) \exp(-iR' \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{X}' / \lambda) d^2 \mathbf{X}' \quad (5)$$

物体变形后, 再进行第二次曝光, 同理此时记录到的光强分布为

$$I_2(\mathbf{X}) = \int d\lambda \int g(\boldsymbol{\alpha}, \lambda) |A_2(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \lambda)|^2 d^2 \boldsymbol{\alpha} \quad (6)$$

式中  $A_2(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \lambda)$  表示为

$$A_2(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \lambda) = \sum_{m=1}^N \exp[i\Delta_m(\mathbf{X})] \int \exp\{i2\pi Z(\mathbf{X}') [n(\lambda) - 1] / \lambda\} \times h_m(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \lambda) \exp(-iR' \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{X}' / \lambda) d^2 \mathbf{X}' \quad (7)$$

式中  $\Delta_m(\mathbf{X})$  为由于漫射物面的变形而引起的对应于第  $m$  个物点的像的位相变化。

经两次曝光, 记录到的全部光强分布为

$$I(\mathbf{X}) = I_1(\mathbf{X}) + I_2(\mathbf{X}) \quad (8)$$

## 2.2 信息处理

图 2 是频谱分析系统。对上述双曝光散斑图进行频谱分析, 则谱面上光强分布为

$$I_s(U) = \langle |A(U)|^2 \rangle \quad (9)$$

式中  $\langle \dots \rangle$  为系综平均,  $A(U)$  为光场分布, 由下式表示

$$A(U) = \left. \int [I_1(\mathbf{X}) + I_2(\mathbf{X})] \exp(-iRU \cdot \mathbf{X}) d^2 \mathbf{X} \right\} \quad (10)$$

$$U = \mathbf{x}_f / \lambda_f L_f$$

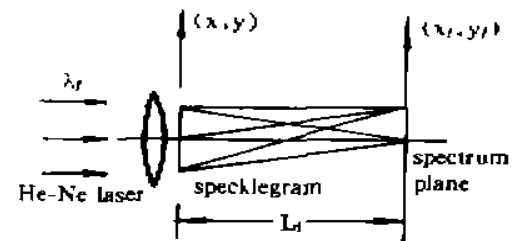


Fig. 2 Analysis system

根据 Parry 对漫射物面高度函数  $Z(\mathbf{X}')$  的假设和 Goodman 关于散斑统计的基本假设<sup>[3]</sup>, 再从散斑统计理论<sup>[4]</sup>出发, 可推得在物面缓慢变形时  $I_s(U)$  的表达式为

$$I_s(U) = C_0 \delta(U) + C_1 \sum_{m=1}^N I_m \int \cos^2 \frac{\Delta_m(\mathbf{x})}{2} d^2 \mathbf{x} \quad (11)$$

式中  $C_0, C_1$  为常数,  $\Delta_{mn}(x)$  为物面变形而引起的对应于两物点(第  $m$  和第  $n$ ) 的像间的相对位相变化, 是物面位移导数的函数, 根据推导  $I_{mn}$  由下式表达

$$I_{mn} = \iint d\lambda_1 d\lambda_2 \iint d^2\alpha_1 d^2\alpha_2 g(\alpha_1, \lambda_1) g(\alpha_2, \lambda_2) \exp \left\{ -4\pi^2\sigma^2 \left[ \frac{n(\lambda_1) - 1}{\lambda_1} - \frac{n(\lambda_2) - 1}{\lambda_2} \right]^2 \right\} \\ \times \int \bar{P}_m(\lambda_1 x_0 - R'\alpha_1) \bar{P}_n^*(\lambda_2 x_0 - R'\alpha_2) \\ \times \bar{P}_n^*(\lambda_1 x_0 - R'\alpha_1 + \lambda_1 RU) \bar{P}_m(\lambda_2 x_0 - R'\alpha_2 + \lambda_2 RU) d^2x_0 \quad (12)$$

式中  $\sigma$  为漫射物面的粗糙度。

### 3 物理意义讨论与实验验证

在(11)式中取出对应于第  $m, n$  两物点的互相关频谱, 其光强分布为

$$I_n(U) = I_{mn} \int \cos^2 \frac{\Delta_{mn}(x)}{2} d^2x, \quad m, n = 1, 2, \dots, N, \quad \text{但 } m \neq n \quad (13)$$

该式表明互相关频谱受  $\cos^2 [\Delta_{mn}(x)/2]$  因子的积分所调制。若  $S$  非常小(即逐点分析), 则被积函数在积分域上可视为不变而提出积分号, 此时(13)式化简为

$$I_n(U) = S I_{mn} \cos^2 \Delta_{mn}(x)/2 \quad (14)$$

该式表明在互相关频谱上将出现对应于漫射物面位移导数的杨氏条纹。由杨氏条纹的间隔和方向即可求得物面上对应点处的位移导数的大小和方向。若  $S$  非常大(即全场分析), 则被积函数一般不能提出积分号, 此时互相关频谱上将出现各种间隔且方向各异的杨氏条纹的叠加而无法分辨。在频谱面上进行高通滤波, 作逆傅里叶变换, 此时在像面上将得到物面位移导数的全场等值条纹。由全场条纹的级数即可求得对应点处位移导数场在滤波孔方向上的分量。

为得到高质量的条纹图, 必须使(12)式对所有的  $\alpha$  和  $\lambda$  变量都取高值。现考虑漫反射物面由两个单色点光源  $\delta(\alpha_1 - \alpha_1^0, \lambda_1 - \lambda_1^0)$  和  $\delta(\alpha_2 - \alpha_2^0, \lambda_2 - \lambda_2^0)$  照相, 此时(12)式化简为

$$I_{mn} = \exp(-16\pi^2\sigma^2/l_c^2) \int \bar{P}_m(\lambda_1^0 x_0 - R'\alpha_1^0) \bar{P}_n^*(\lambda_2^0 x_0 - R'\alpha_2^0) \\ \times \bar{P}_n^*(\lambda_1^0 x_0 - R'\alpha_1^0 + \lambda_1^0 RU) \bar{P}_m(\lambda_2^0 x_0 - R'\alpha_2^0 + \lambda_2^0 RU) d^2x_0 \quad (15)$$

式中  $l_c$  为相干长度。显然该式取值的高低将直接与下列各因素有关。

#### 3.1 物面粗糙度与时间相干长度

对时间部分相干照相,  $\sigma$  必须取低值, 才会在  $l_c$  为有限值时使(15)式中的因子  $\exp(-16\pi^2\sigma^2/l_c^2)$  取高值。当然  $\sigma$  的取值也不能太低(同波长相比), 否则会因干涉光场无足够的位相差以产生完整的相消干涉而使条纹质量下降, 为此起伏高度不得低于光波长, 而  $\sigma$  不小于光波长的  $1/4$ 。综合考虑  $\sigma$  取值的两方面要求, 得到部分相干照明时物面粗糙度的最佳取值为

$$\sigma = \lambda_{\max}/4 \approx 0.19 \mu\text{m} \quad (16)$$

在满足(16)式时, 若  $\exp(-16\pi^2\sigma^2/l_c^2) = 0.9$ , 则可求得相干长度  $l_c$  为  $7.7 \mu\text{m}$ 。一般说来, 这是很容易满足的。

本文也在实验上探讨了物面粗糙度对条纹质量的影响, 实验结果表明, 以抛光后的铝质试件用颗粒尺寸  $10 \sim 14 \mu\text{m}$  的 W14(03) 砂皮随机打毛物面, 然后把物面用自来水冲洗干净并立即吹干后效果最佳。经测量  $\sigma$  值约为  $0.2 \mu\text{m}$ 。显然实验结果同理论分析一致。本文实验采

用由 W14(03) 随机处理的铝质试件。

### 3.2 光源相干性和物面相干区域

对部分相干离焦散斑照相, 由(15)式导出积分域不为零的条件为

$$d_c > lA'/MR \quad (18)$$

式中  $l$  为相机孔径线度,  $A'$  为像面离焦量,  $M$  为放大倍数,  $R$  为像距,  $d_c$  由下式表示

$$1/d_c = 1/d_s + 1/d_t, \quad d_s = \lambda_c/\Delta\alpha_{\max}, \quad d_t = l_t/(\alpha_{\max} + \theta_{\max}), \quad (19)$$

式中  $\lambda_c$  为中心波长,  $\Delta\alpha_{\max}$  为光源对物点的最大张角,  $\alpha_{\max}$  为光源中心对物点的最大偏角,  $\theta_{\max}$  为孔径中心对物点的最大偏角,  $d_c$  为物面相干区域的线度,  $d_s$  和  $d_t$  分别为空间相干区域和时间相干区域的线度。(18)式即为部分相干离焦散斑照相中光源相干性必须满足的条件。由(19)式可知:

- 1) 空间相干区域与时间相干区域互相匹配时最佳;
- 2) 缩小光源线度和增加其到物面的距离可提高空间相干区域;
- 3) 缩小谱宽(即提高相干长度)、缩小物面线度和对称布置光路可提高时间相干区域。

### 3.3 实验验证

实验验证采用图 3 所示装置。采用相对孔径 1:8, 焦距 240 mm 的相机进行 1:1 离焦散斑照相, 像面离焦量为 10 mm, 由(18)式得  $l_c > 0.625$  mm, 再由(19)式得  $d_s = d_t = 2d_c > 1.25$  mm。试件采用直径 32 mm, 周边固支, 中心集中加载的铝板。照射物面的光束就象来自光轴上距物面 480 mm 上的虚点。初级光源  $\sigma_0$  采用 GCQ 200 超高压球形汞灯。在次级光源  $\sigma_1$  上放置小孔滤波器和干涉滤光片。小孔滤波器直径为 0.2 mm, 干涉滤光片中心波长为 546.1 nm, 宽度为 3.5 nm。计算表明, 按上述参数布置的光路, 其  $d_s$  和  $d_t$  均略大于 1.25 mm。

图 4 是实验结果。图 4(a) 为用细激光束照射由部分相干离焦散斑照相所拍摄的双曝光散斑图上某点时, 在远场得到的杨氏条纹照片。图 4(b) 为对由部分相干离焦散斑照相所拍摄的双曝光散斑图进行全场滤波时所得到的位移导数场的等值条纹照片。图 5(a) 是采用逐点法得到的实验值与理论值的比较, 计算表明最大相对误差为 7.8%。图 5(b) 是根据理论公式由计算机绘制的位移导数沿  $y$  方向的等值条纹曲线。

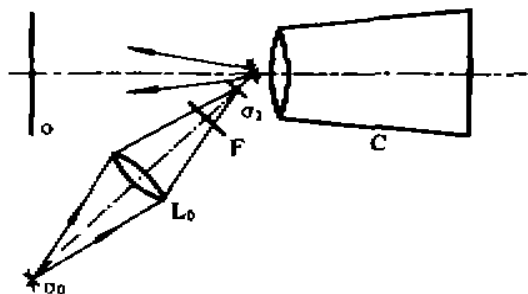


Fig. 3 Experimental setup

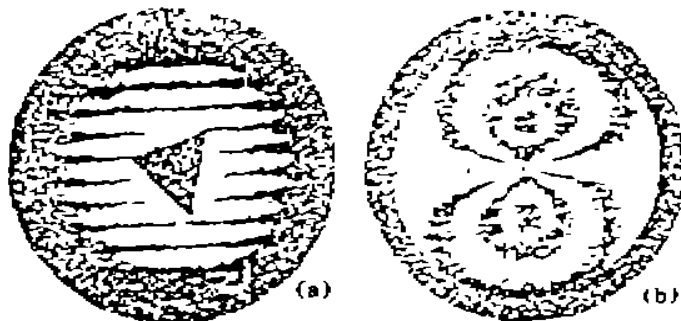


Fig. 4 Experimental results

**结束语** 根据统计光学理论, 研究了部分相干离焦散斑照相的统计特性, 指出了物面粗糙度和光源相干性对条纹质量的影响和光路的对称性及相干性的匹配的重要性, 并指出了提高空间相干区域和时间相干区域的方法和途径。

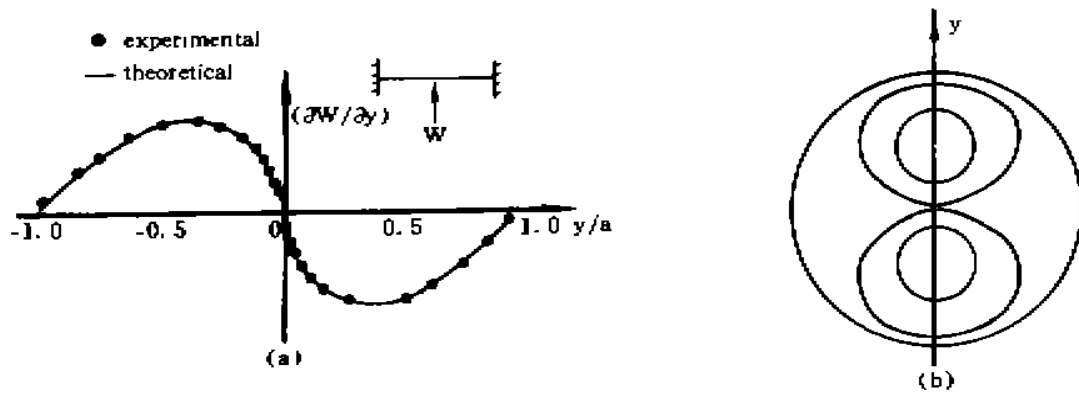


Fig. 5 (a) Experimental and theoretical values, (b) Theoretical fringe pattern

### 参 考 文 献

- [1] D. W. Li, *et al.*, Statistical analysis of one-beam subjective laser speckle interferometry. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1985, 2(5): 657
- [2] J. W. Goodman 著, 詹达三等译, 傅里叶光学导论. 北京: 科学出版社, 1979
- [3] J. C. Dainty 编, 黄乐天等译, 激光斑纹及有关现象. 北京: 科学出版社, 1981
- [4] 刘培森, 散斑统计光学基础. 北京: 科学出版社, 1987

## Statistical Theory of Partially Coherent Defocused Speckle Photography

Wang Kaifu

(Mechanics Division, Yangzhou Institute of Technology, Yangzhou 225001)

(Received 3 July 1994; revised 9 January 1995)

**Abstract** The Statistical law of the partially coherent defocused speckle photography is studied in detail by using statistical optics. The factors influencing the quality of fringes are discussed. Optical systems of partially coherent defocused speckle photography are illustrated, and their operating principles are analyzed theoretically. Experimental results are presented.

**Key words** partially coherent defocussed speckle, displacement derivative field, statistical optics.