第16卷 第1期
1996年1月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 16, No. 1
January, 1996

准恒场驱动谐振子的物理特性*

吴锦伟 郭光灿
(中国科技大学物理系，合肥 230026)

摘 要 研究了准恒场驱动谐振子的物理特性。结果表明，以经典方式描述的驱动光场的位相发生绝热变化时，在输出光场中会出现几何位相。考虑了位相变化或不变时输出光场的量子态的演化，发现输出场的光子数振荡以及态演化的周期行为。

关键词 驱动谐振子， 几何位相， 周期演化。

1 引 言

在量子光学方面，关于几何位相[1]的研究已有不少报道，诸如二能级原子模型[2,3]、光学偏振[4]。在非线性光学方面，对简并参量放大中的几何位相也进行了研究[5]、本文的研究方法即得益于文献[5]的工作，而处理的驱动谐振子使计算更加简单，结果则更加明确，可以使理论的结果与实验工作进行定量的对比。

2 准恒场驱动谐振子的几何位相

考虑如下的哈密顿量（$\hbar=1$）：

$$H=\omega(b^+b+\frac{1}{2})+\lambda[b^-\exp(i\phi)+b\exp(-i\phi)]. \tag{1}$$

其中 b 为光场的湮灭算符，$[b, b^+]=1$。λ 为实的耦合常数，ϕ 为驱动光场的位相。

设 ϕ 随时间 t 缓慢改变，作者把这种驱动称为准恒场驱动，以便能够使用绝热近似的方法求解。准恒场驱动不同于通常的谐振子场驱动，这将是引起光子数振荡和态演化周期行为的根本原因。

对 H 作一么正变换。令平移算符

$$D(z)=\exp(zb^+-z^*b), \tag{2}$$

则

$$\begin{aligned}H'&=D^+(z)HD(z)\\&=\omega b^+b+\omega zz^*+\omega/2+\lambda[\exp(i\phi)]z^*+\lambda[\exp(-i\phi)]z\\&\quad+b^+\{\omega z+\lambda[\exp(i\phi)]\}+b\{\omega z^*+\lambda[\exp(-i\phi)]\}.\end{aligned} \tag{3}$$

令 $\omega z+\lambda\exp(i\phi)=0$,

---

* 国家自然科学基金资助课题。

收稿日期：1994年9月30日；收到修改稿日期：1994年12月14日

则

$$z = -(\lambda/\omega)\exp(i\phi) \tag{4}$$

将(4)式代入(2)式得：

$$H' = \omega b^+ b + \frac{\omega}{2} - \frac{\lambda^2}{\omega} \equiv \omega n + E_0. \tag{5}$$

其中 $n = b^+ b$ 为粒子数算符，$E_0 = \omega/2 - \lambda^2/\omega$。

粒子数态 $|n\rangle$ 为 H' 的本征态，

$$H'|n\rangle = (\omega n + E_0)|n\rangle \tag{6}$$

本征能量 $E_n = \omega n + E_0$

令

$$|z, n\rangle = D(z)|n\rangle = \exp(zb^+ - z^* b)|n\rangle \tag{7}$$

则

$$H|z, n\rangle = D(z)H'D^+(z)D(z)|n\rangle = E_n D(z)|n\rangle = E_n|z, n\rangle. \tag{8}$$

所以，H 的本征值为 $E_n = \omega n + E_0$，相应的本征态为 $|z, n\rangle$。

由 $|n\rangle$ 的完备性 $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$ 易知

$$\sum_n |z, n\rangle\langle z, n| = 1 \tag{9}$$

下面应用求解几何位相的一般公式[1]

$$\dot{\gamma}_n(t) = i\langle n[R(t)]|\nabla_R|n[R(t)]\rangle]\dot{R}(t), \tag{10}$$

计算驱动谐振子的几何位相，其中参数 $R(t)$ 在本文的讨论中为标量函数 $\phi(t)$，即驱动光场的位相。假设 $\phi(t)$ 绝热地变化，则

$$|n[R(t)]\rangle = |z, n\rangle = [\exp(zb^+)][\exp(-z^* b)][\exp(-zz^*/2)]|n\rangle, \tag{11}$$

可以求得

$$\frac{\partial|z, n\rangle}{\partial\phi} = \frac{\partial|z, n\rangle}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\phi} + \frac{\partial|z, n\rangle}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial\phi}. \tag{12}$$

而

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial|z, n\rangle}{\partial z} &= b^+|z, n\rangle - \frac{1}{2}z^*|z, n\rangle, \\ \frac{\partial|z, n\rangle}{\partial z^*} &= -\sqrt{n}\,|z, n-1\rangle - \frac{1}{2}z|z, n\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

又可算得

$$\left.\begin{aligned} b^+|z, n\rangle &= z^*|z, n\rangle + \sqrt{n+1}\,|z, n+1\rangle, \\ \frac{\partial|z, n\rangle}{\partial z} &= \frac{1}{2}z^*|z, n\rangle + \sqrt{n+1}|z, n+1\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

这样容易求得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial|z, n\rangle}{\partial\phi} &= i\,zz^*|z, n\rangle + i\,z\sqrt{n+1}|z, n+1\rangle + i\,z^*\sqrt{n}|z, n-1\rangle, \\ \langle z, n|\frac{\partial}{\partial\phi}|z, n\rangle &= i\,zz^*. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

利用(10)式可得：

$$\dot{\gamma}_n(t) = -|z|^2\dot{\phi}(t) = -(\lambda/\omega)^2\dot{\phi}(t), \tag{16}$$

$$\gamma_n(t) = -(\lambda^2/\omega^2)[\phi(t) - \phi(0)] = -\lambda^2\delta\phi/\omega^2. \tag{17}$$

这就是所要求的驱动谐振子的几何位相，它与驱动光场的位相成线性关系。可以看出，这里的结果比文献[5]中求得的结果要简明得多，很容易跟实验的结果进行定量的对比。

3 态演化及其周期行为

下面将进一步研究输出光场的量子态的演化以及光子数的平均值，在以下的公式中，以 z 表示初始时刻的 z 值，$z(t)$ 表示 t 时刻的 z 值，

$$\left.\begin{aligned} z \equiv z(0) &= (-\lambda/\omega)\exp[i\phi(0)], \\ z(t) &= (-\lambda/w)\exp[i\phi(t)] = z\exp(i\delta\phi) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

设初态为真空态，

$$|\psi(0^-)\rangle = |0\rangle. \tag{19}$$

当驱动场开通后，由于系统不能足够快地对此作出反应，

$$|\psi(0^+)\rangle = |\psi(0^-)\rangle = |0\rangle = \sum_n |z, n\rangle\langle z, n|0\rangle$$

$$= \sum_n \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)\left[(-z)^n/\sqrt{n!}\right]|z, n\rangle, \tag{20}$$

其中应用了(9)式。于是

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)\frac{(-z)^n}{\sqrt{n!}}\exp(-iE_nt)\exp[i\gamma_n(t)]\,|z(t), n\rangle. \tag{21}$$

由于 $\gamma_n(t)$ 与 n 无关，可以提到求和号之外，再令

$$z_1 \equiv z\exp(-i\omega t) \equiv z(0)\exp(-i\omega t) \tag{22}$$

易求得

$$|\psi(t)\rangle = \exp[-iE_0t + i\gamma_n(t)]\exp\left\{\frac{1}{2}[z^*(t)z_1 - z(t)z_1^*]\right\}D[z(t) - z_1]|0\rangle$$

$$= \exp[-iE_0t + i\gamma_n(t)]\exp[-i|z|^2\sin(\delta\phi + \omega t)]\,D[z(t) - z_1]|0\rangle. \tag{23}$$

其中

$$z(t) - z_1 = z[\exp(i\delta\phi) - \exp(-i\omega t)].$$

(23)式即是输出态的演化规律。

当 $\delta\phi = 0$，即驱动光场的位相不变时，$\gamma_n(t) = 0$，即这时不出现几何位相，(23)式成为

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iE_0t)\exp[-i|z|^2\sin(\omega t)]\,D(z - z_1)|0\rangle. \tag{24}$$

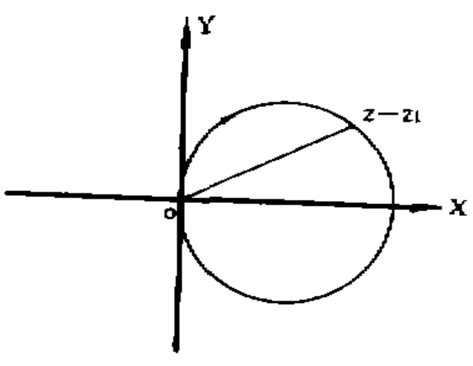

Fig. 1 Evolution of driven-oscillator without gometric phase

可见，在任何时刻，$|\psi(t)\rangle$ 都是一个相干态，其振幅在复平面一作如图1所示的周期变化。

因此，在准恒场驱动的情况下，谐振子的演化表现周期行为，而且有可能重新回到真空态，但是与初始真空态可能有位相的差别。

下面计算光子数平均值

$$\langle n\rangle = \langle\psi(t)|b^+b|\psi(t)\rangle. \tag{25}$$

利用(24)式，很容易求得

$$\langle n\rangle = 4|z|^2\sin(\omega t + \delta\phi)$$

$$= 4|\lambda/\omega|^2\sin^2(\omega t + \delta\phi) \tag{26}$$

由此看出，在驱动谐振子的场合，$\langle n\rangle$ 与几何位相并没有直接的关系；但是 $\langle n\rangle$ 与驱动光场的位相的变化 $\delta\phi$ 有关，故可以从输出光场的光子统计行为反映驱动光场位相的变化。当 $\delta\phi = 0$ 时，

$$\langle n\rangle = 4|\lambda/\omega|^2\sin^2(\omega t), \tag{27}$$

即输出光场的能量出现振荡行为，这与(24)式态演化是一致的。在这种恒场驱动的场合，驱动场与输出场之间出现能量的振荡，由于驱动场是强场，输出场反馈回来的能量几乎不改变它，但是输出场本身的能量确实出现简谐振荡。

总　结　推导了准恒场驱动谐振子中出现的几何位相。假设驱动光场的位相绝热地改变，得到了易定量地与实验对比的几何位相值，而且研究了输出光场量子态的演化，发现了态演化的周期行为和相应的光子数的振荡。

参 考 文 献

[1] M. V. Berry, Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. Roy. Soc.* (*London A*), 1984, **392**(1): 45～57

[2] S. M. Barnett, D. Ellinas, M. A. Dupertuis, Berry's phase in the coherent excitation of atoms. *J. Mod. Opt.*, 1988, **35**(3): 565～574

[3] D. Ellinas, S. M. Barnett, M. A. Dupertuis, Berry's phase in optical resonance. *Phys. Rev.* (*A*), 1989, **39**(7): 3228～3237

[4] D. J. Moore, G. E. Stedman, Adiabatic and nonadiabatic Berry phases for two-level atoms. *Phys. Rev.* (*A*), 1992, **45**(1): 513～519

[5] C. C. Gerry, Berry's phase in the degenerate parametric amplifier. *Phys. Rev.* (*A*), 1989, **39**(6): 3204～3207

Physical Property of Oscillator Driven by Quasi-Constant Field

Wu Jinwei　　Guo Guangcan

(*Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026)

(Received 30 September 1994; revised 14 December 1994)

Abstract　The physical property of oscillator driven by quasi-constant field is studied. Geomatric phase occurs when the phase of driving field varies adiabatically. The periodic evolution of output state and the oscillation of photon number are pointed out.

Key words　driven oscillator, geometric phase, periodic evolution.