

双模压缩数态及参量放大器中的压缩对称性

张云波* 刘文森 苏大春
(山西大学物理系, 太原 030006)

摘 要 得到了参量放大器哈密顿量与广义双模压缩算符共同本征的双模压缩数态。提出了压缩荷与压缩对称性的概念来解释哈密顿量在由广义压缩算符生成的一维么正群变换下的不变性。
关键词 Bogoliubov-Valatin 变换, 双模压缩数态, 压缩对称性, 压缩荷。

在过去的几年中, 人们作了广泛的工作, 把单模压缩态推广到双模情形^[1, 2]。很自然地考虑根据单模压缩数态的例子产生双模压缩数态的方法^[3]。对双模光场需要施行变换

$$a_s = SaS^+ = a \cosh r - b^+ \exp(i\theta) \sinh r, \quad b_s = SbS^+ = b \cosh r - a^+ \exp(i\theta) \sinh r \quad (1)$$

这里 $a(a^+)$ 和 $b(b^+)$ 是光场两个不同模的湮灭和产生算符, 而 $S = S(z)$ 是双模压缩算符

$$S(z) = \exp[za^+b^+ - z^*ab] \quad (2)$$

而 $z = r \exp(i\theta)$ 。为简单起见, 省略了共轭方程。双模压缩数态可定义为 $S(z)$ 作用于双模数态 $|n, m\rangle$ 上的态, 即

$$|n, m\rangle_s = S(z) |n, m\rangle, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

根据 Yuen 的工作^[4], 这些态一定是准光子数算符 $N_{as} = a_s^+ a_s$ 和 $N_{bs} = b_s^+ b_s$ 的本征态。事实上

$$\begin{aligned} N_{as} |n, m\rangle_s &= Sa^+ a S^+ S |n, m\rangle = n |n, m\rangle_s, \\ N_{bs} |n, m\rangle_s &= Sb^+ b S^+ S |n, m\rangle = m |n, m\rangle_s, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

是否存在某种可以通过别的方法引入的压缩数态呢? 作者先前的工作^[5], 从一般的 Bogoliubov 变换开始, 得到了施行变换的么正算符的精确表示式, 接着利用变换及得到的公式把量子光学中的一些二次算符作了对角化。发现本征态是一种与 Yuen 的定义不同的单模压缩数态, 本文将尝试将此程序推广到双模情形。

1 Bogoliubov-Valatin 变换

变换(1)式事实上只是 Bogoliubov-Valatin 变换的一种特殊形式。Bogoliubov-Valatin 变换^[6]有下列一般形式

$$UaU^+ = ua + vb^+, \quad UbU^+ = ub + va^+ \quad (5)$$

* 现在地址为中国科学院物理研究所, 北京 100080。

收稿日期: 1994 年 12 月 5 日

变换系数 u 和 v 应满足条件

$$|u|^2 - |v|^2 = 1 \quad (6)$$

以保证新算符 $c(c^+)$ 和 $d(d^+)$ 服从和旧算符 $a(a^+)$ 和 $b(b^+)$ 同样的玻色对易关系。施行变换(5)的么正算符 U 的表达式为^[5]

$$U(x) = \exp [\zeta(x)a^+b^+ - \zeta^*(x)ab + i\eta(x)(aa^+ + a^+a + bb^+ + b^+b)] \quad (7)$$

$$\zeta(x) = \int_0^x [v(x')(\partial u^*(x')/\partial x') - u^*(x')(\partial v(x')/\partial x')] dx', \quad (8)$$

$$\eta(x) = \frac{1}{2} \int_0^x [u^*(x')(\partial u(x')/\partial x') - v(x')(\partial v^*(x')/\partial x')] dx'$$

系数 ζ , η , u 和 v 满足的另一个关系为

$$u(x) = \cos \Omega(x) - (2i\eta(x)/\Omega(x)) \sin \Omega(x), \quad v(x) = -(\zeta(x)/\Omega(x)) \sin \Omega(x) \quad (9)$$

式中 $\zeta(x)$ 是参数 x 的复函数, $\eta(x)$ 是实函数且 $\Omega(x) = [4\eta^2(x) - |\zeta(x)|^2]^{1/2}$ 。通过 Lie 代数^[7]可以证明(7)式可写成如下正规形式

$$U = (u)^{-1} \exp [-(v/u) a^+b^+] \exp [(a^+a + b^+b) \ln (1/u)] \exp [(v^*/u) ab] \quad (10)$$

若取 $u = \cosh \tau$ 和 $v = -\exp(i\theta) \sinh \tau$ 上式就是普通的压缩算符(2)式, 因此(7)式构成普通形式的广义双模压缩算符。可以看出(7)~(9)都与参数有关, 这意味着如果适当选择参数值, 这些方程可以同时满足, 举两个例子说明。

1) 对于算符 $S(z)$ 如果施行变换(5)式, 再选择 $x = \tau$ 计算(8)式, 可以得到

$$u(\tau) = \cosh \tau, \quad v(\tau) = \exp(i\theta) \sinh \tau, \quad \zeta(\tau) = \tau \exp(i\theta), \quad \eta(\tau) = 0 \quad (11)$$

上式显然满足(9)式。

2) 另一个例子是由 Fisher^[6]等提出的广义压缩算符 $S(z, y)$

$$S(z, y) = \exp [za^+b^+ - z^*ab + iy(aa^+ + a^+a + bb^+ + b^+b)] \quad (12)$$

此算符与(2)式的区别是在指数上多了一个 $a(a^+)$ 和 $b(b^+)$ 的 Hermit 多项式。这里设 y 为 τ 的任意实函数。类似地, 若取 $x = \tau$, 当且仅当 $y = k\tau$ 时由下式给出

$$u(\tau) = \cos(c\tau) - (2ik/c) \sin(c\tau), \quad v(\tau) = -(\exp(i\theta)/c) \sin(c\tau), \\ \zeta(\tau) = \tau \exp(i\theta), \quad \eta(\tau) = k\tau \quad (13)$$

式中 $k > 1/2$ 而 $c = (4k^2 - 1)^{1/2}$ 。似乎也可选择相位角 θ 作为参量 x , 但是在这种情形下找不到自洽解, 因此 θ 不是一个合适的参量。

2 哈密顿量的本征值方程

双模参量放大器的哈密顿量为^{①[2]}

$$H = \omega_s a^+a + \omega_b b^+b - \tau [gab \exp(i\omega t) - g^* a^+b^+ \exp(-i\omega t)] \quad (14)$$

式中 ω 为泵浦频率, ω_s 和 ω_b 分别为信号模与闲置模频率。首先对 H 施行变换(5)式

$$UHU^+ = [\omega_s |u|^2 + \omega_b |v|^2 - iGuv + iG^* u^* v^*] a^+a + [\omega_b |u|^2 + \omega_s |v|^2 - iGuv + iG^* u^* v^*] b^+b \\ + [(\omega_s + \omega_b) u^* v - iGv^2 + iG^* u^{*2}] a^+b^+ + [(\omega_s + \omega_b) uv^* - iG^* v^{*2} + u^2 u^2] ab \\ + [(\omega_s + \omega_b) |v|^2 - iGv^2 + iG^* u^{*2}] \quad (15)$$

① 为方便起见取 $k=1$

式中 $G = g \exp(i\omega t) = |g| \exp[i(\phi + \tau)]$, $\tau = \omega t$ 。另一方面, 假定在原来的粒子数算符表示中变换后的哈密顿量 UHU^+ 可写成对角形式

$$UHU^+ = \omega'_a a^+ a + \omega'_b b^+ b + E_0 \quad (16)$$

式中 ω'_a 和 ω'_b 为新的模式频率, E_0 为基态能量。比较(16)式和(15)式, 得

$$\begin{aligned} \omega'_a &= \omega_a |u|^2 + \omega_b |v|^2 - iGuv + iG^* u^* v^*, & \omega'_b &= \omega_b |u|^2 + \omega_a |v|^2 - iGuv + iG^* u^* v^*, \\ E_0 &= (\omega_a + \omega_b) |v|^2 - iGv^2 + iG^* u^{*2}, & (\omega_a + \omega_b) u^* v - iGv^2 + iG^* u^{*2} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

考虑共振的情形 $\omega = \omega_a + \omega_b$, 为简单起见假定 $\omega_a/\omega_b = \lambda$ 。由(17)式与(6)式联立, 得到解

$$u(\alpha) = (1 + p/2p), \quad v(\alpha) = -i \exp[i(\phi + \tau)] \alpha / [2p(1 + p)] \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \omega'_a &= [p - (1 - \lambda/1 + \lambda)] (\omega/2), & \omega'_b &= [p + (1 - \lambda/1 + \lambda)] (\omega/2), \\ E_0 &= (1 - p)\omega/2 \end{aligned} \quad (19)$$

将(19)式代回到(16)式, 让它作用在双模激态 $|n, m\rangle$ 上, 则 H 的本征值方程由下式给出

$$\begin{aligned} HU^+(\alpha) |n, m\rangle &= \frac{\omega}{2} \left\{ p(n + m + 1) - \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} (n - m) - 1 \right\} |n, m\rangle, \\ n, m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

令 $x = \alpha$, 利用(18)式和(8)式, 发现

$$\zeta(\alpha) = \exp[i(\pi/2 - \phi - \tau)] (1/4) \ln [(1 + \alpha)/(1 - \alpha)], \quad \eta(\alpha) = 0 \quad (21)$$

至于解(18)式和(21)式的自洽性, 将它们代入(9)式, 很容易证明将导出一个恒等式

$$(1/4) \ln [(1 + \alpha)/(1 - \alpha)] = \text{arc tanh} [\alpha/(1 + p)] \quad (22)$$

因此(18)式可写成

$$u(\alpha) = \cosh(|\zeta(\alpha)|), \quad v(\alpha) = -\exp[i(\pi/2 - \phi - \tau)] \sinh(|\zeta(\alpha)|) \quad (23)$$

这里 $|\zeta(\alpha)| = 1/4 \ln [(1 + \alpha)/(1 - \alpha)]$ 。人们注意到由于哈密顿量 H 和本征态 $U^+ |n, m\rangle$ 是含时的所以瞬时本征值方程(20)的存在就要求所谓的绝热条件成立^[9]。对双模光场这个条件表示成:

$$\left| \frac{(\partial H / \partial \tau)_{n', m', \infty}}{\omega_{n', m', \infty}^2} \right| = \begin{cases} (nm)^{1/2} (\alpha/2p^2) \ll 1 & \text{for } n' = n - 1, m' = m - 1 \\ [(n + 1)(m + 1)]^{1/2} (\alpha/2p^2) \ll 1 & \text{for } n' = n + 1, m' = m + 1 \end{cases}$$

式中 $\omega_{n', m', \infty} = E_{n', m'} - E_{n, m}$ 是两能级之间的跃迁频率。人们看到若 $\alpha \ll 1$, 对足够小的 n , 以上条件很容易满足, 而这个要求又是同 H 可以对角化完全自洽的。

3 压缩对称性

$$\text{考虑能级: } E_{n, m} = (\omega/2) \left\{ p(n + m + 1) - [(1 - \lambda)/(1 + \lambda)] (n - m) - 1 \right\} \quad (24)$$

显然 $E_{n, m}$ 对于不同的 n, m 是简并的。那么与这种能量简并相联系的是什么样一种对称性呢?

在算符(12)式中, 满足公式的 y 应当线性依赖于压缩参数 τ , 所以(12)式可写为

$$S(\tau) = \exp(iK\tau),$$

$$K = \exp[i(\theta - \pi/2)] a^+ b^+ + \exp[-i(\theta - \pi/2)] ab + k(aa^+ + a^+ a + bb^+ + b^+ b) \quad (25)$$

用类似的方法将 K 对角化, 得到系数和 K 的本征值方程

$$\zeta(\beta) = \exp[i(\theta - \pi/2)] (1/4) \ln [(1 + \beta)/(1 - \beta)], \quad \eta(\beta) = 0 \quad (26)$$

$$u(\beta) = \cosh(|\zeta(\beta)|), \quad v(\beta) = -\exp[i(\theta - \pi/2)] \sinh(|\zeta(\beta)|) \quad (27)$$

$$KU^+(\beta)|n, m\rangle = c(n+m+1)U^+(\beta)|n, m\rangle, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

式中 $\beta = |z|/2g = 1/2k < 1$ 。同样, K 或 $S(r)$ 的本征态 $U^+(\beta)|n, m\rangle$ 也构成一种双模压缩数态。用 Lie 代数方法^[7]容易证明: 如果满足条件

$$\tau = l\pi - \phi - \theta, \quad (\text{其中 } l = 0, 1, 2, \dots); \quad k = \omega/4|g| = 1/2\alpha. \quad (29)$$

则存在对易关系 $[K, H] = 0$ 。(29)式是 H 对角化的必要条件。它保证了系数 $\zeta(\alpha)$ 和 $\zeta(\beta)$ 某些时刻相同。因此

$$U^+(\alpha)|n, m\rangle = U^+(\beta)|n, m\rangle \quad (30)$$

由此可见, 哈密顿量 H 在以 K 为生成元的一维么正变换下保持不变。对于单模情形, 引入压缩荷的概念来区分态及描述相互作用。并可将 K 看作双模压缩荷, 而分立量子数 $c, 2c, 3c, \dots$ 分别相应于压缩数态 $U^+(\alpha)|0, 0\rangle, U^+(\alpha)|1, 0\rangle, U^+(\alpha)|0, 1\rangle$ 和 $U^+(\alpha)|1, 1\rangle, \dots$ 。另一方面 H 在变换下的关于 r 的不变性表明双模参量放大器具有压缩对称性。

应当指出, 并非所有可以产生压缩态的哈密顿量都具有压缩对称性。例如耦合谐振子的哈密顿量不能用本文的方法对角化, 所以在此类系统中也就很难发现这种动力学对称性。

4 本征态的性质

众所周知, 非经典场的特性是: 场的正交分量的噪声低于真空态噪声, 光子数呈现亚泊松分布。对本文本征态 $U^+|n, m\rangle$, 如果定义密度矩阵

$$\rho_{nm} = U^+|n, m\rangle\langle n, m|U \quad (31)$$

那么各种光子数矩相应地是

$$\langle n_a \rangle = \text{Tr} \rho_{nm} a^+ a = n \cosh^2 \gamma + (m+1) \sinh^2 \gamma,$$

$$\langle n_b \rangle = \text{Tr} \rho_{nm} b^+ b = m \cosh^2 \gamma + (n+1) \sinh^2 \gamma$$

$$\langle n_a^2 \rangle = \text{Tr} \rho_{nm} a^+ a a^+ a = n^2 \cosh^4 \gamma + (m+1)^2 \sinh^4 \gamma + (4nm + 3n + m + 1) \cosh^2 \gamma \sinh^2 \gamma$$

$$\langle n_b^2 \rangle = \text{Tr} \rho_{nm} b^+ b b^+ b = m^2 \cosh^4 \gamma + (n+1)^2 \sinh^4 \gamma + (4nm + 3m + n + 1) \cosh^2 \gamma \sinh^2 \gamma$$

$$\langle n_a^{(2)} \rangle = \text{Tr} \rho_{nm} a^+ a^+ a a = n(n-1) \cosh^4 \gamma + (m+1)(m+2) \sinh^4 \gamma + 4n(m+1) \cosh^2 \gamma \sinh^2 \gamma$$

$$\langle n_b^{(2)} \rangle = \text{Tr} \rho_{nm} b^+ b^+ b b = m(m-1) \cosh^4 \gamma + (n+1)(n+2) \sinh^4 \gamma + 4m(n+1) \cosh^2 \gamma \sinh^2 \gamma$$

$$\langle n_a n_b \rangle = \text{Tr} \rho_{nm} a^+ a b^+ b = nm \cosh^4 \gamma + (n+1)(m+1) \sinh^4 \gamma + (n+m+1)^2 \cosh^2 \gamma \sinh^2 \gamma \quad (32)$$

式中 $\gamma \equiv |\zeta(x)|$, $x = \alpha, \beta$ 。利用(33)式, 正交算符 X_1 , X_2 的偏差 $\langle (\Delta X_i)^2 \rangle \equiv \langle X_i^2 \rangle - \langle X_i \rangle^2$ ($i = 1, 2$) 为

$$\begin{aligned} \langle (\Delta X_1)^2 \rangle &= (1+n+m) \exp(-2\gamma) \\ &= (1+n+m)[(1-x)/(1+x)], \\ \langle (\Delta X_2)^2 \rangle &= (1+n+m) \exp(2\gamma) \\ &= (1+n+m)[(1+x)/(1-x)] \end{aligned} \quad (33)$$

为简单起见这里忽略了相角。图 1 对几个 n 和 m 值画出了偏差 $\langle (\Delta X_1)^2 \rangle$ 作为 x 的函数。将此图与普通双模压缩

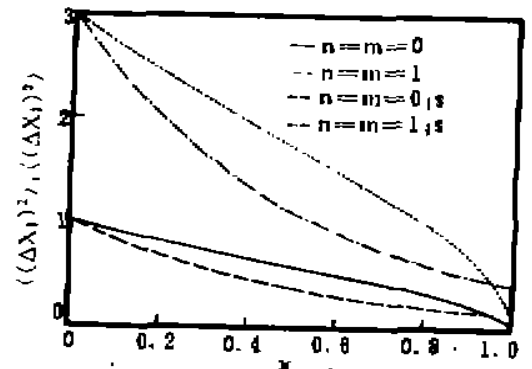


Fig. 1 Variances for two-mode case

数态(3)(这里设 $\tau \equiv x$)的一个偏差($(\Delta X_1)^2$) $= (1 + n + m) \exp(2\gamma)$ 作比较, 可以看到, 除了真空态, 仅当 $x \rightarrow 1$ 时, 两者都小于 1, 而且前者总比后者小。

而根据 Lee^[10] 的工作, 双光子间同一模和不同模间的零时, 二阶相关函数定义为

$$\left. \begin{aligned} C_a^{(2)}(0) &= \langle n_a^{(2)} \rangle - \langle n_a \rangle^2 = -n \cosh^4 \gamma + (m+1) \sinh^4 \gamma + 2n(m+1) \cosh^2 \gamma \sinh^2 \gamma \\ C_b^{(2)}(0) &= \langle n_b^{(2)} \rangle - \langle n_b \rangle^2 = -m \cosh^4 \gamma + (n+1) \sinh^4 \gamma + 2m(n+1) \cosh^2 \gamma \sinh^2 \gamma \\ C_{ab}^{(2)}(0) &= \langle n_a n_b \rangle - \langle n_a \rangle \langle n_b \rangle = (2nm + n + m + 1) \cosh^2 \gamma \sinh^2 \gamma \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

当 $C_a^{(2)}(0) > 0$ 且 $C_b^{(2)}(0) > 0$, 可以得到模内光子聚束效应, 而 $C_{ab}^{(2)}(0) > 0$ 时为模间光子聚束效应。相反, $C_a^{(2)}(0) < 0$, $C_b^{(2)}(0) < 0$, 和 $C_{ab}^{(2)}(0) < 0$ 时, 分别为模内和模间光子反聚束效应。图 2 描述了 $C_a^{(2)}(0)$ 和 $C_b^{(2)}(0)$ 作为参数 x 的函数。 n 和 m 越大模内光子反聚束效应越显著。图 3 表示对各种 n 和 m 总有 $C_{ab}^{(2)}(0) > 0$, 表示在任何情况下都出现模间光子聚束效应。

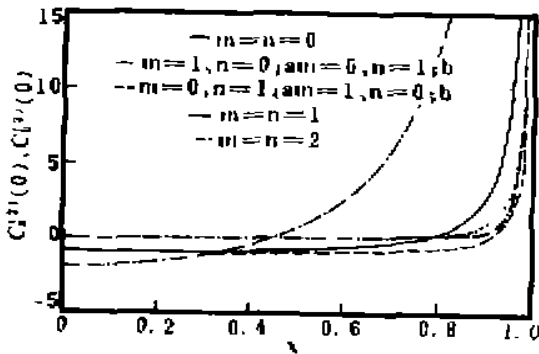


Fig. 2 The zero-time second-order correlation functions between two photons from the same mode

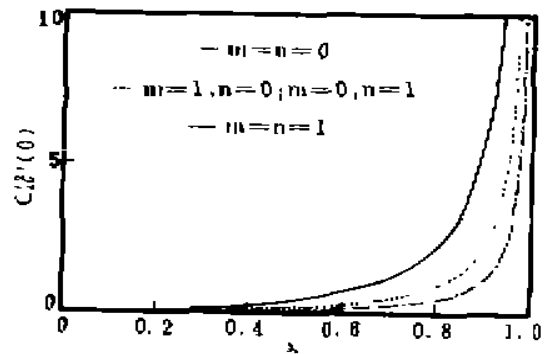


Fig. 3 The zero-time second-order correlation functions between two photons from the different mode

最后, 双模辐射场的非经典效应的判据为

$$\begin{aligned} D_{ab}^{(2)} &= \langle n_a^{(2)} \rangle + \langle n_b^{(2)} \rangle - 2\langle n_a n_b \rangle \\ &= [(n-m)^2 - (n+m)] \cosh^4 \gamma + [(n-m)^2 + n + m + 2] \sinh^4 \gamma \\ &\quad - 2(n^2 + m^2 - nm + 1) \cosh^2 \gamma \sinh^2 \gamma < 0 \end{aligned} \quad (35)$$

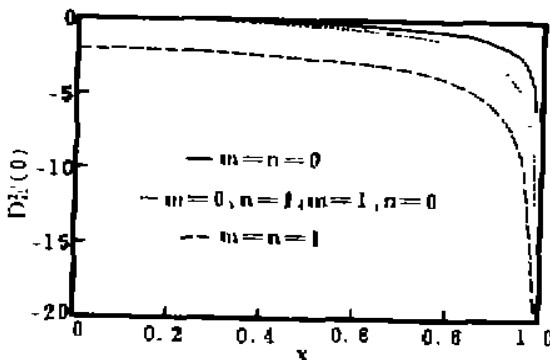


Fig. 4 The criterion for the existence of nonclassical effects in two-mode radiation field

从而看到在这些态中的非经典效应是很明显的, 因为 $D_{ab}^{(2)} < 0$ 对 $0 < x < 1$ 和各种 n 和 m 都满足 (如图 4 所示)。而这个条件的满足是和模间光子聚束效应相联系的, 而且和 Lee^[10] 的结果一致。

结 论 利用本文的方法, 可以找到作为简并参量放大器的哈密顿量和广义双模压缩算符的共同本征态。哈密顿量在关于广义压缩算符的一维么正群变换下的不变性称为压缩对称性。最后通过一些非经典判据讨论了本征态的性质, 并和普通情况作了比较。

参 考 文 献

- [1] C. M. Caves, B. L. Schumaker, New formalism for two-photon quantum optics. I. Quadrature phases and squeezed states. *Phys. Rev. A*, 1985, **31**(5): 3068~3092
B. L. Schumaker, C. M. Caves, New formalism for two-photon quantum optics. II. Mathematical foundation and compact notation. *Phys. Rev. A*, 1985, **31**(5): 3093~3111
- [2] S. M. Barnett, P. L. Knight, Thermal field analysis of squeezing and statistical mixtures in quantum optics. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1985, **2**(3): 467~479
S. M. Barnett, P. L. Knight, Squeezing in correlated quantum systems. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(6-7): 841~853
- [3] M. S. Kim, F. A. M. de Oliveira, P. L. Knight, Photon number distribution for squeezed number states and squeezed thermal states. *Opt. Commun.*, 1989, **72**(1-2): 99~103
M. S. Kim, F. A. M. de Oliveira, P. L. Knight, Properties of squeezed number states and squeezed thermal states. *Phys. Rev. A*, 1989, **40**(5): 2494~2503
- [4] H. P. Yuen, Two-photon coherent states of the radiation field. *Phys. Rev. A*, 1976, **13**(6): 2226~2243
- [5] W. S. Liu, P. Tombesi, Eigenstates of a time-dependent quadratic Hamiltonian, a kind of generalized squeezed number states, *Nuovo Cimento B*, 1992, **107**(5): 595~602
刘文森, 波戈留波夫变换, 算符的对角化和推广的单模压缩数态(一). *山西大学学报*, 1993, **16**(1): 45~54
刘文森, 张云波, 作为本征态的双模压缩数态. *山西大学学报*, 1993, **16**(2): 149~155
- [6] 北京大学《量子统计物理学》编写组, 量子统计物理学, 北京大学出版社, 北京, 1987: 240~309
- [7] R. Gilmore, Lie group, Lie algebras, and some of their applications, New York, Wiley, 1974: 149~178
- [8] R. A. Fisher, M. M. Nieto, V. D. Sandberg, Impossibility of naively generalizing squeezed coherent states. *Phys. Rev. A*, 1985, **29**(6): 1107~1110
- [9] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, New York, McGraw-Hill, 1968: 213~220
- [10] C. T. Lee, Many photon antibunching in generalized pair coherent states. *Phys. Rev. A*, 1990, **41**(3): 1569~1575
C. T. Lee, Higherorder criteria for nonclassical effects in photon statistics. *Phys. Rev. A*, 1990, **41**(3): 1721~1723
C. T. Lee, Nonclassical photon statistics of two-mode squeezed states. *Phys. Rev. A*, 1990, **42**(3): 1608~1616

Two-Mode Squeezed Number States and Squeeze Symmetry in the Two-Mode Parametric Amplifier

Zhang Yunbo Liu Wensen Su Dachun

(Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006)

(Received 5 December 1994)

Abstract The two-mode squeezed number states as the common eigenstates of the parametric amplifier Hamiltonian and the generalized two-mode squeeze operator are found. The concepts of the squeeze charge and the squeeze symmetry are introduced to explain the invariance of the Hamiltonian in the transformation of the one dimensional unitary group generated by the generalized squeeze operator.

Key words Bogoliubov-Valatin transformation, two-mode squeezed number states, squeeze symmetry, squeeze charge.