

双模含失谐均匀加宽激光的不稳定性与混沌

庄 军

谭维翰

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800) (上海大学物理系, 上海 201800)

摘 要 研究了双模含失谐均匀加宽激光的不稳定与混沌行为, 在不同失谐情况下给出了激光经 Hopf 分岔而出现洛伦茨(Lorenz)不稳定的判据(第二阈值), 它与模式跳变不稳定共同构成了激光的不稳定边界, 并且通过模拟发现洛伦茨不稳定在一定条件下将触发激光模式的跳变, 从而表现出双模所特有的非稳定现象。

关键词 不稳定性, 混沌, 均匀加宽。

1 引 言

自从把描写单模均匀加宽激光的振荡方程等价于洛伦茨方程以来^[1], 研究单模激光不稳定与混沌的理论获得了长足的进展, 从均匀加宽到非均匀加宽^[2, 3], 由共振到失谐^[4], 逐步使得理论对实验的定量描述和预言成为可能。另一方面, 对于多模激光的情况, 近年来实验上所发现的不稳定与混沌现象则远比单模情况丰富, 充分表现出非线性系统所特有的动力学行为, 比如横向空间的相位奇点和湍流^[5], 多纵模的跳变现象与混沌的相互作用等等。

对于多模激光不稳定与混沌的理论研究关键是寻找一种有效的数学处理方法, 为简化数学, 本文暂讨论两个振荡模式, 并针对坏腔的情况($\sigma > 2$) (见后文), 除了观察到第二阈值附近的 Hopf 分岔及混沌外, 还发现这种不稳定在一定条件下可以成为模式跳变的动力, 这一点与好腔情况下($\sigma < 2$), 拉比(rabi)不稳定触发模式跳变的现象相对应^[6]。

2 双模激光振荡的稳定性分析

本文研究的物理模型是双模均匀加宽的激光器, 可给出其振荡方程为^[4, 7]:

$$\begin{aligned}
 \partial W_1 / \partial \tau &= -W_1 - \delta_1 Y_1, & \partial W_2 / \partial \tau &= -W_2 - \delta_2 Y_2, \\
 \partial Y_1 / \partial \tau &= -Y_1 + \delta_1 W_1 + R X_1 - X_1 Z - X_2 \tilde{Z} / 2, & \partial Y_2 / \partial \tau &= -Y_2 + \delta_2 W_2 + R X_2 - X_2 Z - X_1 \tilde{Z} / 2, \\
 \partial X_1 / \partial \tau &= -\sigma(X_1 - Y_1), & \partial X_2 / \partial \tau &= -\sigma(X_2 - Y_2), \\
 X_1(\delta_{21} + \delta_{c1}) &= -\sigma W_1, & X_2(\delta_{22} + \delta_{c2}) &= -\sigma W_2, \\
 \partial Z / \partial \tau &= -bZ + (X_1 Y_1 + X_2 Y_2), & \partial \tilde{Z} / \partial \tau &= -b\tilde{Z} + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1), \\
 \tilde{\theta}(Z, t) &= X_1 W_2 - X_2 W_1, & & (1)
 \end{aligned}$$

(1)式已进行了归一化^[4], 如 i 取 1, 2 分别为模 1 和模 2, 则 X_i 为光场振幅, Y_i, W_i 分别为原子

极化的异相与同相成份, Z, \bar{Z} 分别为反转粒子数的直流和拍频成份。并且 $\delta_m = \partial \phi_i / \gamma_1 \partial x, \delta_n = c \partial \phi_i / \gamma_2 \partial z, \delta_i = (\omega_0 - \omega - \partial \phi_i / \partial t) / \gamma_2, \theta(z, t) = \delta_2 - \delta_1, \sigma = \gamma_c / \gamma_2, b = \gamma_1 / \gamma_2, \gamma = \gamma_2 t$, 其中 ω_0 为原子的跃迁频率, R 为超阈度, $\gamma_c, \gamma_1, \gamma_2$ 分别为腔, 原子的横向和纵向弛豫。

方程(1)的非零定态解有两组分别为:

X_{1s}	Y_{1s}	Z_s	W_{1s}	X_{2s}	Y_{2s}	\bar{Z}_s	W_{2s}
$\pm C$	$\pm C$	C^2	$-\delta_1 X_{1s}$	0	0	0	0
$\pm \sqrt{\frac{2C_2^2 - C_1^2}{3}}$	X_{1s}	$\frac{C_1^2 + C_2^2}{3}$	$-\delta_1 X_{1s}$	$\pm \sqrt{\frac{2C_1^2 - C_2^2}{3}}$	X_{2s}	$2Y_{1s}Y_{2s}$	$-\delta_2 X_{2s}$

这里仅研究定态解 (i) 附近的稳定特性, 如果用 X 代表变量 $X_i, Y_i, W_i, Z, \bar{Z}$ 中的任意一个, 而用 X_s 表示它们的定态值, 并设定态值附近的扰动为 $\tilde{X} = X' \exp(\lambda t)$, 则可将 $X = X_s + \tilde{X}$ 代入(1)式进行通常的线性稳定性分析, 可得关于 λ 的特征方程^[7]:

$$f(\lambda) = [\lambda^3 + (\sigma + 2)\lambda^2 + (\sigma + R - \sigma\delta_1^2)\lambda + 2\sigma(R - 1) - 2\sigma\delta_1^2] \\ [\lambda^3 + (\sigma + 2)\lambda^2 + (\sigma - \sigma\delta_1^2 + \delta_2^2 + 1 + C^2/2)\lambda + \sigma(\delta_2^2 - \delta_1^2) + C^2\sigma] = 0 \quad (2)$$

假如上式中关于 λ 的根 λ_j 都小于零, 则说明所给定的定态解 (i) 是稳定的; 如果其中有一个根 λ_k 大于零, 系统将出现通常的模式跳变不稳定, 并用 R_0 表示模式跳变的临界阈值; 当 λ_k 为纯虚数时, 则对应 Hopf 分岔, 系统将出现洛伦茨不稳定现象, 相应的超阈度称为第二阈值 R_c 。

参照文献[4] [7], 由(2)式可给出第二阈值:

$$R_c = \min \{R_{c1}, R_{c2}\} \\ R_{c1} = \frac{\sigma(\sigma + 4) - \sigma^2\delta_1^2}{\sigma - 2}, \quad R_{c2} = \frac{\sigma(2\sigma + 7) - (2\sigma^2 + \sigma + 2)\delta_1^2 + 4\delta_2^2 + 2}{\sigma - 2} \quad (3)$$

可见双模情况下出现洛伦茨不稳定的临界超阈度 R_c 将随 δ_1, δ_2 等参数的不同而取不同的表达形式 R_{c1} 或 R_{c2} , 而且为使第二阈值有意义通常要求 $R_c > R_1$, 其中 R_1 为第一阈值 $R_1 = 1 + \delta_1^2$; 另外一方面由于模式跳变不稳定的存在(当 $R < R_0$ 时), 所以 R_c 还应满足

$$R_c > R_0 \quad (4)$$

为获得 R_c, R_0 的具体形式, 作者对几种典型失谐情况下的不稳定特性进行了分析, 结果见表 1。

Table 1.

	(I) $\delta_1 = 0$ $\delta_2 \neq 0$	(II) $\delta_1 = -\delta_2$ $= \delta$	(III) $\delta_1 \neq 0$ $\delta_2 = 0$
R_c	$\frac{\sigma(\sigma + 4)}{\sigma - 2}$	$\frac{\sigma(\sigma + 4) - \sigma^2\delta^2}{\sigma - 2}$	Min $\{R_{c1}, R_{c2}\}$
R_0	✓	$(\delta^2 - 1)(1 + 2\sigma) - 2\delta^2$	Max $\{1 + 2\delta_1^2, (\delta_1^2 - 1)(1 + 2\sigma)\}$
δ_1 or δ_2	✓	$\delta^2 \leq \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}$	$\delta_1^2 \leq \frac{2\sigma + 2}{2\sigma - 1}$

表中 R_{c1}, R_{c2} 由(3)式给出, δ_1 或 δ_2 的取值范围根据(4)式确定。

3 数值模拟与结论

表 1 解析地给出了以失谐 δ_1, δ_2 为自变量的不稳定边界, 为验证上述分析结果并观察具体的不稳定现象, 对方程(1)进行了数值模拟, 模拟过程中参数 $\sigma = 4, b = 1$, 并保持不变,

初值取在定态点(i)附近。

1) $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0.5 \neq 0$ 。由表 1 中可得 $R_c = 16$ ，模拟结果验证了这一阈值的存在。当所取的超阈值满足 $R < R_c$ 时，系统稳定在定态点(i)上；当 $R = R_c$ 时，模 1 出现了稳定的极限环(Hopf 分岔)，模 2 仍没有起振见图 1；当 $R = 16.3 > R_c$ 时，系统进入了混沌状态。并且在 这种情况下不存在模式的跳变。

2) $\delta_1 = -\delta_2 = 1.191$ 。由表 1 可得跳变阈值及第二阈值分别为 $R_0 = 0.929, R_c = 4.652$ 。另外从表 1 还可以看到，在 $\delta^2 \leq (\sigma + 1)/(\sigma - 1)$ 的范围内总有 $R_0 < R_1$ ，因此在起振条件下，不稳定阈值实质上只有 R_c 在起作用。模拟的结果与第 1 种情况相同，当 $R = 4.852 > R_c$ 时，两模同时进入混沌见图 2。

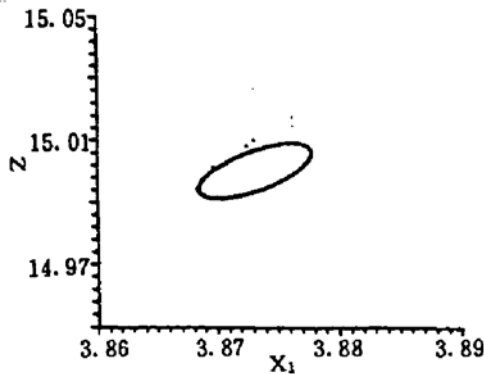


Fig. 1 $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0.5$, and $R = R_c$, the stable limit cycle of mode 1

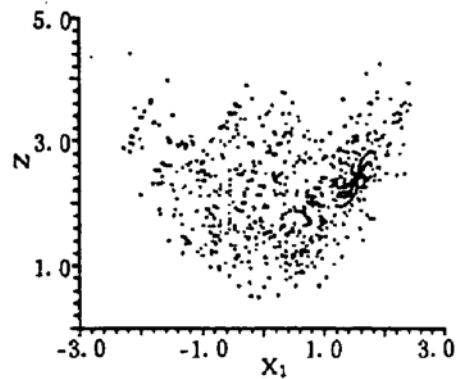


Fig. 2 $\delta_1 = -\delta_2 = 1.191$, and $R > R_c$, the chaotic solution of mode 1 (mode 2 is similar)

3) $\delta_1 = 1.178 \neq 0, \delta_2 = 0$ 。由表 1 的解析结果可知在 $\delta_1^2 \leq (2\sigma + 1)/(2\sigma - 1)$ 的范围内，始终有 $R_0 > R_1$ ，因此对于定态解(i)，洛伦茨不稳定和模式跳变现象都可能出现。结合(3)式可得 $R_c = \min \{R_{c1}, R_{c2}\} = 4.645, R_0 = 3.774$ 。首先取 $R = 3.77 < R_0 < R_c$ ，正如前面所分析的那样，系统在定态解(i)的基础上出现了模式跳变现象。众所周知，这种模式的跳变是由一般的系统噪声或外界干扰所引起的^[8]，当 R 的取值满足 $R_0 < R = 4.58 < R_c$ 时，结果系统收敛并稳定在原定态点(i)上；最后当取 $R = 4.645 = R_c$ ，发现两个模式在各自的定态点附近出现了不稳定极限环(如图 3)，但经过了一段时间后或当 $R = 4.8 > R_c$ 时，最终并没有使系统进入混沌而却触发了模式的跳变(如图 4)。而假如此时不存在第二阈值 R_c ，虽然模 2 具优势，但正如前面所模拟的那样并不会出现模式的跳变。

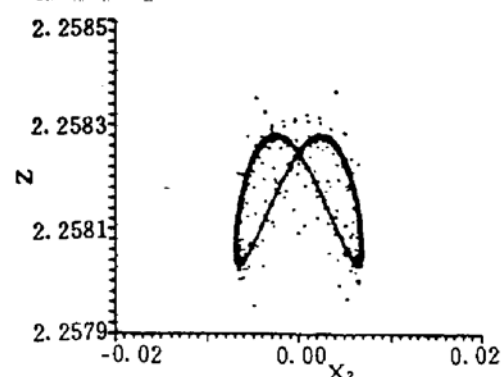
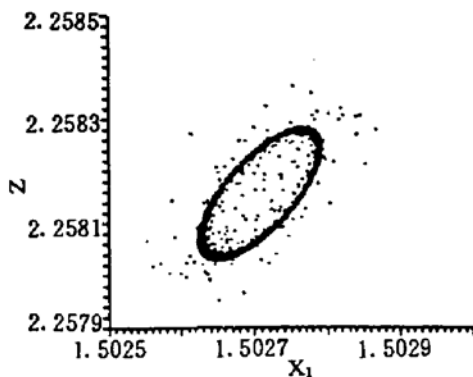


Fig. 3 $\delta_1 = 1.178, \delta_2 = 0$, and $R = R_c$, the unstable limit cycle of mode 1 and mode 2

由以上对双模激光振荡的稳定特性分析及数值模拟可得出以下结论：① 在一般情况下，普通的多模跳变不稳定与洛伦茨不稳定共同构成系统的不稳定边界，只有超阈值满足 $R_0 < R$

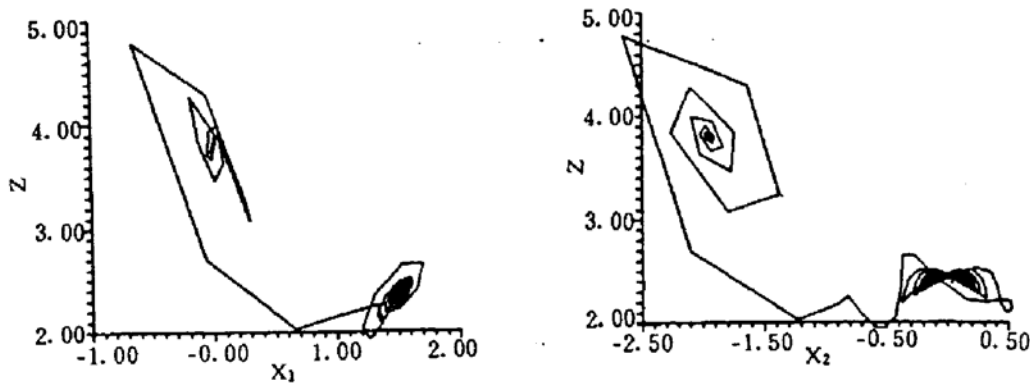


Fig. 4 $\delta_1 = 1.178$, $\delta_2 = 0$, and $R > R_c$, hopping of mode 1 and mode 2

$< R_c$ 时, 所给定的定态解才是稳定的; ② 在双模情况下, 第二阈值的解析式并不象单模那样是通一的^[4], 而视失谐情况的不同而异 (见表 1); ③ 在 $R < R_0$ 的不稳定区, 由系统噪声或外界干扰引起通常的多模跳变现象; 而在 $R > R_c$ 的洛仑茨不稳定区, 有可能象单模那样使系统进入混沌状态, 但也有可能触发系统由当前定态向新的定态过渡, 也就是说多模跳变现象的动力有可能来自这种固有的洛仑茨不稳定, 这种模式跳变的新机制类似于好腔条件下拉比不稳定对模式跳变的作用^[6]。

参 考 文 献

- [1] H. Haken, Analogy between higher instabilities in fluids and laser. *Phys. Lett.*, 1975, **53A**(1): 77~78
- [2] P. Mandel, Influence of lorentz broadening on the stability of monomode ring lasers. *Opt. Comm.*, 1983, **45**(2): 269~272
- [3] Tan Weihan, Ma Guobin, Zhuang Jun *et al.*, Influence of detuning on the butterfly effect of laser oscillation. *Acta Physica Sinica*, 1994, **3**(12): 884~890
- [4] P. Mandel, Influence of doppler broadening on the stability of monomode ring laser. *Opt. Comm.* 1983, **44**(3): 400~404
- [5] M. Brambilla, F. Battipede, L. A. Lugiato *et al.*, Transverse laser patterns. I. phase singularity crystals. *Phys. Rev.*, 1991, **43**(9): 5090~5113
- [6] K. Ikeda, K. Otsuka, K. Matsumoto, Maxwell-Block turbulence. *Prog. Theor. Phys.*, 1989, Supplement (99): 295~324
- [7] P. W. Milonni, M-L-Shih, J. R. Ackerhalt, *Chaos in Laser-Matter Interactions*. Singapore, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1987, **123**: 141
- [8] M. Ohtsu, Y. Teramachi, Y. Otsuka *et al.*, Analyses of mode-hopping phenomena in an AlGaAs Laser. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1986, **QE-22**(4): 535~543

Unstability and Chaos of a Detuned Two-Mode Homogeneously Broadened Laser

Zhuang Jun

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

Tan Weihan

(Department of Physics, Shanghai University, Shanghai 201800)

(Received 4 November 1993; revised 14 November 1994)

Abstract Unstability and chaos of a detuned homogeneously broadened laser are studied. Under the different conditions, the criterions, when a laser becomes unstable via a Hopf bifurcation and mode hopping, are given, which defines the unstability margin of a laser. Moreover, by numerical simulation, we verify the criterions and find that Lorenz unstability can trigger mode hopping unstability on certain condition.

Key words unstability, chaos, homogeneously broadened.