第 15 卷 第 9 期 光 学 学 报 Vol. 15, No. 9
1995 年 9 月 ACTA OPTICA SINICA September, 1995

增益色散及双光子吸收所支持的小幅孤波*

俞重远 陈陆君 梁昌洪
(西安电子科技大学物理系，西安 710071)

摘 要 通过连续波背景上的小幅近似，给出了光纤中增益色散及双光子吸收所支持的小幅暗孤波解，讨论了它们在参数空间中不同区域的演化特征，结果表明：在一些区域存在稳定的小振幅暗孤波，但在另一些区域，这种孤波是不稳定的。

关键词 小幅孤波， 增益色散， 双光子吸收。

1 引 言

在最近十年中，光孤子已得到充分而广泛的研究，主要是由于它在光处理、光开关及光通信方面，有着巨大的应用潜力，明孤子在多种情况下的各种动力学行为已得到充分研究，支持明孤子的条件是载波应处于反常色散区，然而对于正常色散区中的非线性动力学，需借助暗孤波和小振幅孤波进行研究。众所周知，掺铒光纤的极化弛豫时间 T，导致了增益色散[1]，对于实际问题，材料损耗也总是不可避免的，一般情况下，克尔(Kerr)非线性介质的非线性折射系数的虚部则来源于双光子吸收[2,3]，本文就是研究这两种效应在微扰情况下所共同支配的小振幅解析暗孤波解，并给出两类暗孤波在参数空间存在的区域。

2 微扰分析与小振幅孤波

计及上述两种因素并不考虑增益饱和时，有如下方程

$$i\frac{\partial u}{\partial x_1}-(\sigma-i\gamma_2)\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}+(2+i\gamma_n)|u|^2u=-i\gamma_G u \tag{1}$$

式中 σ 为群速色散强度，且 $\sigma>0$ 为正常色散区，$\sigma<0$ 为反常色散区，$\gamma_2=L_D g_0\tau_p^2$，$\gamma_G=(\alpha-g_0)L_D$(参见文献[1])，$\gamma_n/2$ 为非线性折射系数的虚部与实部之比[2]，$x_1=2x/L_D$，$t_1=(t-x/v_g)/T$，$u=A/P_0^{1/2}$，$\tau_P=T_P/T_0$，$L_D=T_0^2/|k_0''|$ 为色散长度，T_0 和 P_0 分别为脉冲宽度和峰值功率，(1)式也是文献[4]的一种特殊情况，在文献[5]中被称为非线性 Schrodinger-Ginzburg-Landau 方程，下面研究三个 γ 项作为微扰情况下的小振幅孤波(为简单计，x_1、t_1 仍用 x、t 表示)。

众所周知，对 γ_2，γ_G，γ_n 均为零的非微扰方程，(1)式有小振幅暗孤子解，且具有**

* 西安电子科技大学基金资助。

** 参见[附录]。

收稿日期：1994 年 1 月 4 日；收到修改稿日期：1994 年 8 月 15 日

$$u(x,\ t) = [u_0 + a(x,\ t)]\exp[i2u_0^2x + i\varphi(x,\ t)], \tag{2}$$

且

$$a(x,\ t) = -(1/2)\,u_0\nu^2\,\mathrm{sech}^2[Z/2], \qquad \varphi(x,\ t) = -2\nu/(1+\exp Z),$$

$$Z = 2\nu u_0[t - c(1-\nu^2/2)x], \qquad c = \pm 2u_0$$

当三个 γ 项以微扰形式出现于(1) 式，设想(1) 式仍有(2) 式形式的小振幅孤波解，但这时 $a(x,\ t)$ 和 $\varphi(x,\ t)$ 不再取上述形式，下面将确定它们的具体形式。将(2)式代入(1)式并分离实部与虚部有

$$-2u_0^3 - 2u_0^2a - u_0\frac{\partial\varphi}{\partial x} - a\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \sigma\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \sigma(u_0+a)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - 2\gamma_2\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$
$$-\gamma_2(u_0+a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2u_0^3 + 6u_0^2a + 6u_0a^2 + 2a^3 = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} - 2\sigma\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \sigma(u_0+a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \gamma_2\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \gamma_2(u_0+a)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \gamma_n(u_0+a)^3 = -\gamma_G(u_0+a) \tag{4}$$

如果作下列尺度假设*

$$\begin{cases} u_0 = O(1), \quad \sigma = O(1), \quad \gamma_G = O(\varepsilon^6), \quad \gamma_2 = O(\varepsilon^2), \quad \gamma_n = O(\varepsilon^6), \\ \varphi = \varepsilon\varphi_0 + \varepsilon^3\varphi_1 + \cdots, \quad a = \varepsilon^2a_0 + \varepsilon^4a_1 + \cdots, \quad \tau = (t-cx)\varepsilon, \quad z = \varepsilon^3x \end{cases} \tag{5}$$

将(5)式代入(3)式和(4)式，分离各级变量(即令 ε 的各次幂系数为零)，最后令 $\varepsilon = 1$(相当于把 ε 吸收到含三个 γ 的项之中)，可得

$$c\frac{\partial a_0}{\partial\tau} + \sigma u_0\frac{\partial^2 a_0}{\partial\tau^2} = 0, \qquad u_0\left(c\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau} + 4u_0a_0\right) = 0 \tag{6}$$

$$\left(c\frac{\partial a_1}{\partial\tau} + \sigma u_0\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau^2}\right) + \sigma\left(2\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}\frac{\partial a_0}{\partial\tau} + a_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2}\right) - \frac{\partial a_0}{\partial z} = \gamma_Gu_0 - \gamma_2u_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2} + \gamma_n\frac{\partial^2 a_0}{\partial\tau^2} + \gamma_nu_0^3$$
$$u_0\left(c\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} + 4u_0a_1\right) + ca_0\frac{\partial\phi_0}{\partial\tau} + \sigma u_0\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}\right)^2 - \sigma\frac{\partial^2 a_0}{\partial\tau^2} + 6u_0a_0^2 - u_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} = \gamma_2u_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tau^2} \tag{7}$$

由(6)式可得

$$a_0 = -\frac{c}{4u_0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}, \tag{8}$$

且

$$c^2 = 4\sigma u_0^2 \tag{9}$$

联立求解(7)式，并利用(9)式消去其中 a_1 和 φ_1

$$2\frac{\partial a_0}{\partial z} + \left(\frac{6c}{u_0}a_0 + \frac{c}{\sigma}\gamma_2\right)\frac{\partial a_0}{\partial\tau} - \frac{c\sigma}{4u_0^2}\frac{\partial^3 a_0}{\partial\tau^3} = -\gamma_Gu_0 - 2\gamma_2\frac{\partial^2 a_0}{\partial\tau^2} - \gamma_nu_0^3 \tag{10}$$

如果作变换 $f = \tau - bz$，$g = z$。则(10) 式可化为微扰 KdV 方程

$$A_1\frac{\partial a_0}{\partial g} + A_2a_0\frac{\partial a_0}{\partial f} - \frac{\partial^3 a_0}{\partial f^3} = -\varepsilon p(a_0) \tag{11}$$

$$\varepsilon p'(a_0) = \frac{cu_0}{\sigma^2}\gamma_G + \frac{2c}{\sigma^2}\gamma_2\frac{\partial^2 a_0}{\partial f^2} + \frac{cu_0^3}{\sigma^2}\gamma_n, \qquad b = \frac{c}{2\sigma}\gamma_2, \qquad A_1 = \frac{2c}{\sigma^2}, \qquad A_2 = \frac{24u_0}{\sigma} \tag{12}$$

再作变换 $w = A_2a_0/6$，$y = -g/A_1$。则(11) 式化为标准 KdV 方程的微扰形式

$$w_y - 6ww_f + w_{fff} = \varepsilon\bar{p}(w) \tag{13}$$

其中

$$\varepsilon\bar{p}(w) = B_1 - B_2\frac{\partial^2 w}{\partial f^2}, \qquad B_1 = -\frac{cu_0A_2}{6\sigma^2}(\gamma_G + u_0^2\gamma_n), \qquad B_2 = \frac{2c}{\sigma^2}\gamma_2 \tag{14}$$

---

* 参见[附录]。

利用文献[6]的方法，可求出(13)式的绝热近似解 $w=-2\mu^2(y)\,\mathrm{sech}^2 Z$, $Z=\mu(y)[f-\zeta(y)]$ 中的时间慢变参数的演化

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dy}&=-\frac{1}{4\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\bar{p}(w)\,\mathrm{sech}^2 Z dZ,\\ \frac{d\zeta}{dy}&=4\mu^2-\frac{1}{4\mu^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\bar{p}(w)[Z+\frac{1}{2}\sinh Z]\,\mathrm{sech}^2 Z dZ,\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{8}{15}B_2\mu^3-\frac{1}{2}B_1\frac{1}{\mu},\qquad \zeta(y)=4\int_0^y\pi^2(y')dy'+\zeta_0\tag{16}$$

将(16)式回到原尺度

$$\mu d\mu/dx=-b_1[\mu^4-b_2/b_1],\qquad b_1=8\gamma_2/15,\qquad b_2=-(u_0^2/\sigma)(\gamma_G+u_0^2\gamma_n).\tag{17}$$

当 $b_2/b_1>0$ 时，(17)式有解

$$\left.\begin{aligned}\mu^2&=\begin{cases}\sqrt{b_2/b_1}\ \mathrm{ctanh}\left[2\sqrt{b_1b_2}(x-x_0)\right] & (\mu^4>b_2/b_1)\\ \sqrt{b_2/b_1}\ \tanh\left[2\sqrt{b_1b_2}(x-x_0)\right] & (\mu^4<b_2/b_1)\end{cases}\\ x_0&=-\frac{1}{4\sqrt{b_1b_2}}\ln\left|\frac{\mu_0^2+b_2/b_1}{\mu_0^2-b_2/b_1}\right|\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

当 $b_2/b_1<0$ 时，(17)式有解

$$\left.\begin{aligned}\mu^2&=-\mathrm{sgn}(b_1)\sqrt{|b_2/b_1|}\ \mathrm{tg}\left[2\sqrt{|b_1b_2|}(x-x_0)\right]\\ x_0&=\frac{1}{\mathrm{sgn}(b_1)2\sqrt{|b_1b_2|}}\mathrm{tg}^{-1}\left[\mu_0^2/|b_2/b_1|^{1/2}\right]\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

μ_0 是 $x=0$ 时 μ 的取值，于是 $a_0(x,t)$ 具体形式为

$$a_0(x,t)=-(\sigma/2\mu_0)\,\mu^2(x)\,\mathrm{sech}^2\{\mu(x)[\tau-(c+b)x-\zeta(x)]\}\tag{20}$$

(20)式和(2)式给出了方程(1)的小幅暗孤波解。

3 两类暗孤子的参数区域及传输特性

由上面分析可以看到，在不同的参数区域，存在不同演化类型的小幅暗孤波，它们由(18)、(19)决定。(9)式意味着 $\sigma>0$，因此，这种小幅孤波只能存在于正常色散区。孤波演化类型取决于

$$b_2/b_1=-\frac{15u_0^2}{8\sigma\gamma_2}(\gamma_G+u_0^2\gamma_n)\tag{21}$$

根据(20)式，由于 $\sigma>0$，因此，这种小幅孤波也只能是暗孤波($a_0<0$)。(21)式中 $\gamma_G=(\alpha-g_0)L_D$，因此 $\gamma_G+u_0^2\gamma_n=(\alpha L_D+u_0^2\gamma_n)-g_0L_D$，在 α、γ_n 及 γ_2 确定的情况下，可调节 g_0 使(21)式改变符号，即改变孤波演化类型，当(21)式所确定的值大于零，即在 $\gamma_2>0$ 且 $\alpha L_d+u_0^2\gamma_n<g_0L_D$ 时，任何幅值的暗孤波，经过特征距离

$$\Delta x_0=\left[(32/15)\left|\gamma_2u_0^2(\gamma_G+u_0^2\gamma_n)\right|/\sigma\right]^{-1/2}\tag{22}$$

之后，都演化成稳定幅值的暗孤波，孤波的速度是

$$v=(c+b)-\frac{2\sigma^2}{c}\mu^2(x)=c\left[1+\frac{\gamma_2}{2\sigma}-\frac{2\sigma^2}{c^2}\mu^2(x)\right]\tag{23}$$

由(2)式及(8)式，孤波也将相对中心频率产生频移

$$\Delta\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2\sigma}{c}\mu^2(x)\tag{24}$$

频移量取决于 c 即 v 的符号(或孤波运动方向)，如果 μ_∞^2(即 $\sqrt{|b_2/b_1|}$) $> (c^2/2\sigma^2)[1+(\gamma_2/2\sigma)]$，则存在一空间距离 Δx：$\mu^2(\Delta x)=(c^2/2\sigma^2)[1+(\gamma_2/2\sigma)]$，当 $x>\Delta x$ 后，孤波将改变原有的运动方向。在 $\gamma_2>0$ 且 $\alpha L_D+u_0^2\gamma_n>g_0L_D$ 的情况下，根据(19)式，当孤波经过(22)式所给距离之后。由于波幅一致增大，使小幅近似(2)式失效，这时小幅暗波很可能演化成基本暗孤波，也就是说，这时不存在稳定的小幅暗孤波解，由于这时是损耗相对增益占优势的情形，因此前面所说基本暗孤波是以减小背景深度 u_0 而不是以单方面增加暗孤波的幅度发展得到的。当 $\gamma_2<0$ 时，情况刚好与上述相应情形相反。

需要强调，本文结论不适应光纤损耗特别小的情况，是因为(5)式的尺度假设需要 $\gamma_G\sim O(\varepsilon^6)$，这意味着 $\alpha L_D=g_0L_D+O(\varepsilon^6)$，如果认为光纤极化弛豫时间 $\tau_P=T_P/T_0$ 在 $O(\varepsilon^0)\sim O(\varepsilon^2)$ 范围内，则要求 $g_0L_D=\gamma_2/\tau_P^2$ 在 $O(\varepsilon^2)\sim O(\varepsilon^{-2})$ 范围内，这也就要求 αL_D 在这个范围内，因此 g_0L_D 和 αL_D 不能过小，以致于到 $O(\varepsilon^6)$ 量级，但二者应非常接近，使二者差值为 $O(\varepsilon^6)$ 量级。众所周知，通过控制掺杂，g_0 是容易在较大范围得到控制的，而增大 αL_D 可以有二种途径：即调节波长工作点，使其远离最低损耗点，如 1.55 μm；或选用较大损耗的光纤。在文献[4]中的数值示例中取 $\gamma_G=0.025$、$\gamma_2=-0.056$*，在文献[2]中取 $\gamma_0=\alpha L_d=0.01$、$\gamma_n=-0.01$**。因此，如果认为 $\gamma_2=-0.056$ 是 $O(\varepsilon^2)$ 量级，则 $O(\varepsilon^6)$ 应约为 0.0002，由于前面已说明，通过调节 g_0 可使 γ_G 取任意较小的值，因此 γ_G 达到0.0002 的量级总是可以做到的。但对于 γ_n，也要求在 0.0002 量级，这正好介于 $\gamma_n=0$(标准非线性薛定谔方程的情况)和 $\gamma_n=-0.01$ 之间，因此，让 γ_n 处于 $O(0.0002)$ 也是实际中所允许的，原因很简单，这相当于在标准非线性薛定谔方程附加一个极小的微扰，若说 $\gamma_n=-0.01$ 才是符合实际，那么以前所有有关对标准非线性薛定谔方程的孤子研究还有什么意义呢？此外，γ_n 是双光子吸收强度的反映，如果光纤中的微量成份具有符合双光子吸收的能级，就有这种现象，因此，γ_n 的大小与这种微量成份的浓度及中心频率有关，可以调节控制。所以，(5)式尺度假设基本处于实际所允许范围之内。另一方面，如果认为 $\gamma_n=-0.01$ 是 $O(\varepsilon^6)$ 量级，那么要求 $\gamma_2\sim O(\varepsilon^2)$ 在 0.2 的量级，在实际中，γ_2 是否能做到 0.2 的量级，作者还没查到有关实验数据，所以作者认为不妨可作为一种可能出现的光学物理现象的预言。

总之，在增益色散及双光子吸收光纤中，当参数点处于 $\gamma_2>0$ 且 $\alpha L_D+u_0^2\gamma_n<g_0L_D$，或 $\gamma_2<0$ 且 $\alpha L_D+u_0^2\gamma_n>g_0L_D$ 的区域中时，任何幅值小振幅暗孤波将演化成稳定的小幅暗孤波，但处于 $\gamma_2<0$ 且 $\alpha L_D+u_0^2\gamma_n<g_0L_D$ 或 $\gamma_2>0$ 且 $\alpha L_D+u_0^2\gamma_n>g_0L_D$ 的区域时，小幅暗孤波是不稳定的，这种小幅状态只能在(22)式所给距离内存在。这一结果对研究正常色散区中的非线性动力学，研究增益色散及双光子吸收效应等，都有一定的参考意义。

参 考 文 献

[1] G. P. Agrawal, Effect of gain dispersion and stimulated Raman scattering on soliton amplification in fiber amplifiers. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(4): 226～228

[2] Y. Chen, J. Atai, Absorption and amplification of dark solitons. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(24): 1933～1935

[3] Y. Chen, Stability of dark solitary waves trapped in media with gain and loss. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(9): 6922～6924

[4] L. Gagnon, P. A. Belanger, Adiabatic amplification of optical solitons. *Phys. Rev. A*, 1991, **43**(11): 6187～

* 注：其中符号与本文符号 γ_0、γ_2、γ_n 相差一负号。** 其中 α_2 即为本文 $-\gamma_n$。

6193

[5] B. A. Malomed, Bound solitions in the nonlinear Schrodinger-Ginzhurg-Landau equation. *Phys. Rev. A*, 1991, **44** (10): 6954～6957

[6] Y. S. Kivshar, B. A. Malomed, Dynamics of soliton in nearly integrable systems. *Rev. Mod. Phys.*, 1989, **61**(4): 763～915

[附录]：关于尺度假设(5)式的进一步说明

在摄动法中用于分离各种不同量级的 $\varepsilon(<1)$，其大小并无重要的意义，重要的是，所有物理量尺度假设之间必须是自适应的，协调的，只有各种尺度假设之间的自适应性才赋于 ε 的真正意义和量度。事实上，如果把(5)式中的 $\varepsilon\to\varepsilon^{1/2}$，则 γ_0、γ_2 和 γ_s 等分别变成 $O(\varepsilon^3)$、$O(\varepsilon^{3/2})$ 和 $O(\varepsilon^2)$ 等量级，但这并不会给出新内容，有了这个概念，就可以做下面的分析。首先，在正常色散区的标准非线性薛定谔方程有暗孤子解

$$u(x,\ t) = u_0\frac{(\lambda - i\nu)^2 + \exp Z}{1 + \exp Z}\exp\ (i2u_0^2x) \tag{A1}$$

$$Z = 2\nu u_0(t - t_0 - 2\lambda u_0x), \qquad \lambda^2 = 1 - \nu^2 \tag{A2}$$

ν 为标志小幅孤波幅度的参量，当 $\nu^2\ll 1$ 时有小幅孤波解

$$u(x,\ t) = [u_0 + a\ \mathrm{sech}^2(Z/2)]\exp[i2u_0^2x + i\varphi(x,\ t)] \tag{a3}$$

$$\varphi(x,\ t) = -2\nu/(1 + \exp Z), \qquad a = -u_0\nu^2/2 \tag{A4}$$

$$Z = 2\nu u_0[t - c(1 - \nu^2/2)x], \qquad c = \pm 2u_0 \tag{A5}$$

那么上述 $\nu^2\ll 1$ 的条件，从尺度分析角度看它对应于什么样的尺度假设呢？研究表明，它正是对应(5)式中前二式及后四式的假设，这时从非线性薛定谔方程就可导出(A3)～(A5)式，而不需从(A1)和(A2)取极限得到。于是由(A4)式和(5)式中 φ 及 a 的尺度展开式(其第一项)，就赋予 ε 的真正意义和量度。数值研究表明，当 a 可以大到 0.25，即 ε^2 最大可达 0.25 (因 $a\sim\varepsilon^2$)；当 a 达到 0.35 以后时，小幅孤波解(A3)式与精确解差异显著[也可见 Y. S. Kivshar, *Opt. Lett.*, 1992, **17**: 1322, (11)式，文中分析了双折射光纤中的小幅孤波，那里的 ν(相当于这里 $\sqrt{a}$) 可达 0.4]，于是 $O(\varepsilon^6)$ 不能超过 0.016。

Gain Dispersion and Two-Photon Absorption Supported Optical Small-Amplitude Dark Solitons

Yu Zhongyuan Chen Lujun Liang Changhong

(*Physics Department, Xidian University, Xi'an* 710071)

(Received 4 January 1994; revised 15 August 1994)

Abstract By using small-amplitude approximation on continuous wave background, the gain dispersion and two-photon absorption supported small-amplitude dark optical soliton solutions are analytically studied in this paper. Their features of evolution in the various regions in parameter space are discussed. The result shows that the small-amplitude dark solitons are stable in some regions, but are unstable in other regions in which the small-amplitude state of the dark soliton will contains until excessed certain propagating distance.

Key words small-amplitude dark solitons, gain dispersion, two-photon absorbtion.