

定态双向环形气体激光中的饱和效应*

朱士群 印建平 陈玉华
(苏州大学物理系, 苏州 215006)

摘 要 从理论上分析了双向环形气体激光中的全饱和效应, 导出了定态激光强度分布函数的解析形式, 算出了定态双模强度的自相关和互相关函数。与激光的三次模型和实验测量相比较, 激光的全饱和模型与实验测量符合得更好, 而三次模型的结果偏差较大。

关键词 双向环形激光, 自相关, 互相关。

1 引 言

由于双向环形激光器中光场传播方向相反, 而两个模式几乎都工作于原子共振谱线的中心, 所以它在激光回转仪中有着广泛的应用。加之它本身所表现出的反相关效应和背散射效应, 因而近年来双模环形激光场的统计性质一直是人们十分关注的理论和实验研究课题^[1~8]。在以往的理论分析中所采用的双模环形激光模型^[1~8]仅包含光场的三次非线性项, 因而理论中只包含光场的三次饱和效应。含有光场全饱和效应的激光理论只在单模激光的首次通过时间分布和强度涨落的分析中采用过^[9~12]。本文采用含有全饱和效应的双模环形气体激光理论, 导出了定态双模激光强度分布函数的解析解, 计算出定态激光强度的自相关和互相关函数, 同传统的三次激光模型导出的结果和实验测量^[2, 3]相比较, 全饱和激光模型与实验测量符合得更好, 而三次激光模型给出的结果误差相对偏大。

2 理论分析

在双模环形气体激光的三次理论中, 复电场 $E_1(t)$ 和 $E_2(t)$ 服从下式的郎之万方程^[1~8]:

$$\begin{aligned} dE_1/dt &= a_1 E_1 - |E_1|^2 E_1 - \xi |E_2|^2 E_1 + q_1(t), \\ dE_2/dt &= a_2 E_2 - |E_2|^2 E_2 - \xi |E_1|^2 E_2 + q_2(t). \end{aligned} \quad (1)$$

式中 a_1 和 a_2 分别是两个模式的泵浦参量, ξ 是双模耦合系数, $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$ 是相互独立的两个随机变量, 表征由自发辐射所引起的量子噪声, 且有:

$$\langle q_i^*(t) q_j(t') \rangle = 2P \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (i, j = 1, 2) \quad (2)$$

其中 P 是噪声强度。

在双模环形气体激光的全饱和理论中, 光场服从下式:

* 江苏省教委自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1994 年 8 月 23 日

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} &= -K_1 E_1 + \frac{F E_1}{1 + (|E_1|^2 + \xi |E_2|^2)/F} + q_1(t), \\ \frac{dE_2}{dt} &= -K_2 E_2 + \frac{F E_2}{1 + (|E_2|^2 + \xi |E_1|^2)/F} + q_2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

式中 K_1 和 K_2 分别是双模的空腔衰减常数, F 是增益参量, 且有 $a_1 = F - K_1$ 和 $a_2 = F - K_2$. 其实(3)式的二项式展开保留到 $|E_1|^2$ 和 $|E_2|^2$ 项就得到(1)式.

定态时, 对应于双模激光场几率密度 $Q(E_1, E_2)$ 的福克-普朗克方程^[13]为:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[h_i(E_1, E_2) Q(E_1, E_2) - \frac{P}{2} \frac{\partial Q(E_1, E_2)}{\partial x_i} \right] = 0, \quad (4)$$

式中 $x_1 = E_{1x}$, $x_2 = E_{1y}$, $x_3 = E_{2x}$, $x_4 = E_{2y}$. 对于三次激光模型, 有

$$\begin{aligned} h_{ci}(E_1, E_2) &= (a_1 - I_1 - \xi I_2) x_i, & (i = 1, 2), \\ h_{cj}(E_1, E_2) &= (a_2 - I_2 - \xi I_1) x_j, & (j = 3, 4). \end{aligned} \quad (5)$$

对于全饱和激光模型, 有

$$\begin{aligned} h_{si}(E_1, E_2) &= \left[-K_1 + \frac{F}{1 + (I_1 + \xi I_2)/F} \right] x_i, & (i = 1, 2), \\ h_{sj}(E_1, E_2) &= \left[-K_2 + \frac{F}{1 + (I_2 + \xi I_1)/F} \right] x_j, & (j = 3, 4). \end{aligned} \quad (6)$$

在(5)式和(6)式中, $I_1 = |E_1|^2$, $I_2 = |E_2|^2$.

对工作于原子共振谱线中心的非均匀展宽气体激光器, 双模耦合系数 $\xi = 1$. 从(4)式和(5)式可得到三次激光理论的定态强度分布函数^[1~3]:

$$\begin{aligned} Q_{sc}(I_1, I_2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi P}} \left(\frac{a_1 - a_2}{P} \right) \\ &\times \left\{ \frac{\exp [(a_1 I_1 + a_2 I_2 - I_1^2/2 - I_2^2/2 - I_1 I_2)/P]}{\exp (a_1^2/2P) [1 + \operatorname{erf} (a_1/\sqrt{2P})] - \exp (a_2^2/2P) [1 + \operatorname{erf} (a_2/\sqrt{2P})]} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

式中 $\operatorname{erf}(x)$ 是误差函数, 由下式给出^[14]:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt. \quad (8)$$

而全饱和激光理论的定态强度分布函数可从(4)式和(6)式得到

$$\begin{aligned} Q_{ss}(I_1, I_2) &= \\ &= \frac{[(K_2 - K_1)/PF][1 + (I_1 + I_2)/F]^{F^2/P} \exp[-(K_1 I_1 + K_2 I_2)/P]}{(P/K_1 F)^{F^2/P+1} \exp(K_1 F/P) \Gamma(F^2/P + 1, K_1 F/P) - (P/K_2 F)^{F^2/P+1} \exp(K_2 F/P) \Gamma(F^2/P + 1, K_2 F/P)} \quad (9) \end{aligned}$$

式中 $\Gamma(\omega, x)$ 是不完全伽玛函数, 由下式给出^[14]:

$$\Gamma(\omega, x) = \int_x^\infty t^{\omega-1} \exp(-t) dt \quad (10)$$

双模激光强度 I_i 的 n 次幂和 I_j 的 m 次幂乘积的预期值为:

$$\langle I_i^n I_j^m \rangle = \iint_0^\infty Q_s(I_1, I_2) I_i^n I_j^m dI_1 dI_2, \quad (i, j = 1, 2). \quad (11)$$

这样, 平均激光强度为

$$\langle I_i \rangle = \iint_0^\infty Q_s(I_1, I_2) I_i dI_1 dI_2, \quad (i = 1, 2). \tag{12}$$

归一化的自相关函数和互相关函数为：

$$\lambda_{ii}(0) = \langle I_i^2 \rangle / \langle I_i \rangle^2 - 1, \quad (i = 1, 2), \tag{13}$$

$$\lambda_{12}(0) = \langle I_1 I_2 \rangle / (\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle) - 1. \tag{14}$$

这样，根据方程(7)、(9)和(11)~(14)式就可以算出三次激光模型和全饱和激光模型的双模平均强度、自相关和互相关函数的值。

3 两种理论和实验的比较

为了检验两种理论的准确程度，有必要将理论结果和实验测量^[2, 3]进行比较。参量的数值取自本文献[2, 3]，它们为 $P = 2$, $\Delta a = a_1 - a_2 = 0.8$, 空腔衰减常数 K_1 和 K_2 分别取为 $K_1 = 30$, $K_2 = 30.8$ 和 $K_1 = 300$, $K_2 = 300.8$, 以及 $\Delta a = K_2 - K_1$ 。强激发模式的强度为 I_1 , 而弱激发模式的强度为 I_2 。

激光强度 $\langle I_1 \rangle$ 、 $\langle I_2 \rangle$ 的理论预期值和实验结果随强激发模式泵浦参量 a_1 的变化曲线如图 1 所示。理论预期值由(7)、(9)和(12)式算出。由图 1 可见，当空腔衰减常数 K_1 和 K_2 较大时，三次模型、全饱和模型和实验测量之间符合得很好，两种理论之间的差别不大。但当激光高于阈值而 K_1 和 K_2 较小时，全饱和模型给出的强模强度 $\langle I_1 \rangle$ 比三次模型的大得多。弱模强度 $\langle I_2 \rangle$ 却几乎不受 K_1 和 K_2 取值大小的影响。两种理论和实验符合得都很好。

归一化激光强度的自相关函数 $\lambda_{11}(0)$ 、 $\lambda_{22}(0)$ 和互相关函数 $\lambda_{12}(0)$ 以及实验结果^[2, 3]随强模泵浦参量 a_1 的变化曲线如图 2 所示。理论预期值由(7)、(9)、(11)-(14)式算出。由图 2 可见，当 $K_1 = 300$, $K_2 = 300.8$ 时，全饱和激光理论计算得到的曲线同所有的实验数据符合得都很好，而三次激光理论给出的曲线偏差较大。

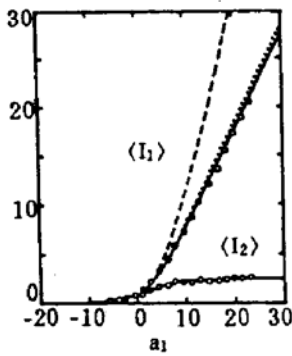


Fig. 1 $\langle I_1 \rangle$ and $\langle I_2 \rangle$ as a function of a_1 with $\Delta a = a_1 - a_2 = 0.8$. o: experimental data, — from Eqs. (7) and (12), - - from Eqs. (9) and (12) with $K_1 = 30$, $K_2 = 30.8$, from Eqs. (9) and (12) with $K_1 = 300$, $K_2 = 300.8$

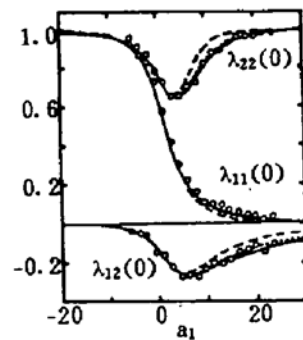


Fig. 2 The auto and cross correlation functions of the strong and weak modes as a function of a_1 with $\Delta a = a_1 - a_2 = 0.8$. o: experimental data, — from Eqs. (7) and (12)-(14); - - from Eqs. (9) and (12)-(14) with $K_1 = 30$, $K_2 = 30.8$,; from Eqs. (9) and (12)-(14) with $K_1 = 300$, $K_2 = 300.8$

图 1 和图 2 清楚表明，适当选取空腔衰减常数 K_1 和 K_2 的值，全饱和模型可以与实验数据符合得很好，而三次激光模型给出的结果偏差较大。只有当激光在低于阈值或略高于阈值

的条件下工作, 而且满足 $|F - K_1|/F \ll 1$ 和 $|F - K_2|/F \ll 1$ 时, 三次激光理论才适用。

4 饱和效应

定态激光强度的饱和效应可以从两种不同理论的强度分布函数中看出来。定态双向双模环形激光的强度分布函数 Q_{sc} 和 Q_{ss} 作为强模强度 I_1 的函数分别如图 3(a) 和 (b) 所示。弱模强度 I_2 取 0 与 2, $\Delta a = 1$, 全饱和激光理论中的空腔衰减常数 $K_1 = 30$, $K_2 = 31$ 。从图中可见, 当强模泵浦参量 a_1 小于或等于零时, 光场在低于或等于阈值的条件下工作。三次模型和全饱和模型的强度分布函数 Q_{sc} 和 Q_{ss} 的曲线在 I_1 不大时基本重合, 相差甚微, 而当 I_1 增大时, 全饱和模型给出的值比三次模型的大。当强模泵浦参量 a_1 大于零, 光场在高于阈值的条件下工作时, 如果 I_1 较小, Q_{ss} 的曲线低于 Q_{sc} 的曲线; 随着 I_1 的增大, Q_{ss} 的曲线就高于 Q_{sc} 的曲线。从图中可见, 当强模强度 I_1 较大时, Q_{ss} 的值总比 Q_{sc} 的值大, 而且随着 I_1 的增加, 两者之间的差距也越来越大。饱和效应随着 I_1 的增大而愈益明显。从图中还可以看出, 随着弱模强度 I_2 的增加, Q_{sc} 和 Q_{ss} 的曲线向 I_1 减小的方向移动, 曲线的峰值也随着 I_2 的增加而减小。

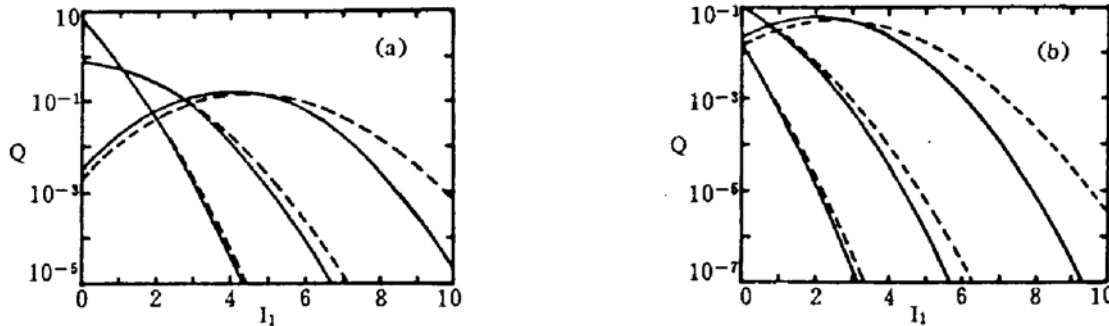


Fig. 3 $Q_{sc}(I_1, I_2)$ and $Q_{ss}(I_1, I_2)$ as a function of I_1 for $\Delta a = 1$. — from Eq. (7), -- from Eq. (9) with $K_1 = 30$, $K_2 = 31$. (a) $I_2 = 0$, (b) $I_2 = 2$

讨 论 通过双向环形气体激光的全饱和理论, 得到了定态时双模激光场的强度分布函数, 算出了光场强度的平均值、自相关函数和互相关函数, 与只含有三次饱和项的三次激光模型以及实验数据相比较, 全饱和激光模型与实验符合得更好, 而三次激光模型得到的结果偏差较大。理论分析表明, 三次模型是全饱和模型的一级近似, 只有当激光在低于阈值或阈值附近工作时才适用。

参 考 文 献

- [1] M. M-Tehrani, L. Mandel, Coherence theory of the ring laser. *Phys. Rev. A*, 1978, 17(2): 677~693
- [2] M. M-Tehrani, L. Mandel, Intensity fluctuations in a two-mode ring laser. *Phys. Rev. A*, 1978, 17(2): 694~700
- [3] S. Singh, Statistical properties of single-mode and two-mode ring lasers. *Phys. Rep.*, 1984, 108(4): 217~273
- [4] L. Pesquera, R. Blanco, M. A. Rodriguez, Statistical properties of gas ring laser with backscattering. *Phys. Rev. A*, 1989, 39(11): 5777~5784
- [5] T. H. Chyba, Phase-jump instability in the bidirectional ring laser with backscattering. *Phys. Rev. A*, 1989, 40(11): 6327~6338
- [6] F. C. Cheng, Phase-jump and intensity instabilities in a homogeneously broadened bidirectional ring laser with

- backscattering. *Opt. Commun.*, 1991, **82**(1, 2) : 45~50
- [7] R. J. C. Spreeuw, R. Centeno Neelen, N. J. van Druten *et al.*, Mode coupling in a He-Ne ring laser with backscattering. *Phys. Rev. A*, 1990, **42**(7) : 4315~4324
- [8] S. Zhu, Steady-state analysis of a two-mode laser with multiplicative noise. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(11) : 8148~8153
- [9] S. Zhu, A. W. Yu, R. Roy, Statistical fluctuations in laser transients. *Phys. Rev. A*, 1986, **34**(5) : 4333~4347
- [10] S. Zhu, White noise in dye laser transients. *Phys. Rev. A*, 1990, **42**(7) : 5758~5761
- [11] S. Zhu, Saturation effects in a laser with multiplicative white noise. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(5) : 3210~3215
- [12] S. Zhu, Saturation effect in a laser at steady state. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(7) : 4969~4973
- [13] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*. Springer-Verlag, Berlin, 1984
- [14] 数学手册. 北京, 高等教育出版社, 1979 : 595, 599

Saturation Effects in a Bidirectional Ring Gas Laser at Steady State

Zhu Shiqun Yin Jianping Chen Yuhua

(Department of Physics, Suzhou University, Suzhou 215006)

(Received 23 August 1994)

Abstract The full saturation effects of a bidirectional ring gas laser are studied theoretically. An analytic expression of the laser intensity distribution function at steady state is derived. The auto and cross correlation functions of the steady state two mode intensities are calculated. Compared with third order laser theory and experimental measurements, excellent agreement between full saturation theory and experiments is obtained. The third order theory leads relatively large errors.

Key words bidirectional ring laser, auto correlation, cross correlation.