

# 双模腔场-两原子系统中原子和场的动力学特性

宋同强 冯健 王文正 许敬之  
(聊城师范学院光通讯所, 聊城 252059)

**摘 要** 研究了关联双模 SU(1,1) 相干态与两个二能级原子的相互作用过程中原子的崩溃与回复效应、辐射场的双模压缩和高阶双模压缩、以及光场的两模之间的非经典相关性质, 详细讨论了原子间的偶极相互作用对它们的影响。

**关键词** 关联双模 SU(1,1) 相干态, 非经典效应, 偶极相互作用。

## 1 引 言

随着高 Q 腔中单模双光子微波激射器的成功运转<sup>[1]</sup>, 人们为实现双模双光子微波激射器而对双模腔场作用下原子和场的动力学特性进行了广泛的讨论<sup>[2~7]</sup>, 但是, 这些研究都限于讨论单原子与双模光场的相互作用。最近本文作者研究了两个二能级原子与双模腔场的相互作用<sup>[7]</sup>, 详细讨论了原子间的偶极相互作用对双模腔场中两原子系统的辐射谱的影响。本文将在此基础上, 研究关联双模 SU(1,1) 相干态与两个二能级原子的相互作用过程中, 原子的崩溃与回复, 辐射场的双模压缩和高阶双模压缩, 以及光场的两模之间的非经典相关性质, 并详细讨论原子间的相互作用对它们的影响。

## 2 模型和理论推导

在旋波近似下, 考虑两原子间的偶极相互作用时, “双模腔场-两原子”系统的哈密顿量为<sup>[8]</sup>:

$$H = \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 + \omega_i \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma_{z,i} + g \sum_{i=1}^2 (a_1^\dagger a_2^\dagger \sigma_i + \sigma_i^\dagger a_1 a_2) + g_s (\sigma_1^\dagger \sigma_2 + \sigma_2^\dagger \sigma_1), \quad (1)$$

其中  $a_i, a_i^\dagger$  分别为模  $i$  腔场的湮灭和产生算符;  $\sigma_i^\dagger, \sigma_i$  和  $\sigma_{z,i}$  为第  $i$  个原子的赝自旋算符;  $g, g_s$  分别为原子与场和原子与原子之间相互作用的耦合常数;  $\omega_i$  为模  $i$  腔场光子的频率;  $\omega_s$  为原子的跃迁频率。假定初始时刻, 两个原子均处于激发态  $|ee\rangle$ , 双模光场处在关联双模 SU(1,1) 相干态  $|z, q\rangle$ <sup>[9]</sup>,

$$|z, q\rangle = (1 - |z|^2)^{(1+q)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(n+q)!}{n!q!} \right]^{1/2} z^n |n+q, n\rangle. \quad (2)$$

其中  $z = -\tanh(\theta/2) \exp(-i\varphi)$ ,  $q$  为两个模之间的光子数差。随着时间的演化, 在相互作用表象中, 系统在  $t > 0$  时刻的态矢可以写为:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F_n [C_1(n,t) |n+q+2, n+2, gg\rangle C_2(n,t) |n+q+1, n+1, eg\rangle + C_3(n,t) |n+q+1, n+1, ge\rangle + C_4(n,t) |n+q, n, ee\rangle] \quad (3)$$

$$F_n = (1 - |z|^2)^{(1+q)/2} [(n+q)! / (n!q!)]^{1/2} z^n \quad (4)$$

$$C_1(n,0) = C_2(n,0) = C_3(n,0) = 0, \quad C_4(n,0) = 1 \quad (5)$$

利用相互作用表象中的薛定谔方程, 并考虑到初始条件(5)式, 则在共振条件 ( $\omega_s = \omega_1 + \omega_2$ ) 下得:

$$\left. \begin{aligned} C_1(n,t) &= 2DD'/ab + 2DD'/a(a-b) \exp(iat) + 2DD'/b(b-a) \exp(ibt) \\ C_2(n,t) &= C_3(n,t) = D'/(a-b) [\exp(ibt) - \exp(iat)] \\ C_4(n,t) &= 1 + 2D^2/ab + 2D^2/a(a-b) \exp(iat) + 2D^2/b(b-a) \exp(ibt) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} D &= \sqrt{(n+q+2)(n+2)}, & D' &= \sqrt{(n+q+1)(n+1)} \\ a &= -\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 8(D^2 + D'^2)}, & b &= -\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 8(D^2 + D'^2)} \\ \delta &= g_s/g', & \tau &= gt. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这样, 就确定了系统在相互作用表象中的态矢, 由此可以对系统中原子和场的动力学特性进行全面的研究。

### 3 原子的崩溃与回复

由系统任意时刻的态矢(3)式, 可求得能级  $|ee\rangle$  的占有几率

$$P_4(t) = \sum_n |F_n|^2 |C_4(n,t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 4|F_n|^2 \left\{ \left[ \frac{D^4}{a^2b^2} + \frac{D^4}{a^2(a-b)^2} + \frac{D^4}{b^2(a-b)^2} \right] + \frac{2D^2D'^2}{a^2b^2} \left[ \cos \frac{1}{2}\delta\tau \cos \frac{a-b}{2}\tau + \frac{\delta}{a-b} \sin \frac{1}{2}\delta\tau \sin \frac{a-b}{2}\tau \right] - \frac{2D^4}{ab(a-b)^2} \cos(a-b)\tau \right\} \quad (8)$$

(8)式中的第一项是常项, 第二项和第三项对应于两个不同的崩溃与回复系列, 其回复时间分别为  $\tau_R = \pi$  和  $\pi/2$  (如图 1 所示)。随着原子间的耦合常数的增加,  $P_4(t)$  的长时间行为开始出现无规则振荡(如图 1(d)所示)。考虑到初始光场的光子数分布的特点<sup>[9]</sup>, 当  $\delta$  较小时,  $\delta/(a-b)$  是个小量。这时, 回复时间  $\tau_R = \pi$  的回复的振幅主要由(8)式中第二个方括号内第一项确定。而当  $\delta\tau = (2k+1)\pi$  时 ( $k=0,1,2,\dots$ ),  $\cos(\delta\tau/2) = 0$ 。所以(8)式中第二项对  $\tau = (2k+1)\pi/\delta$  处的振幅贡献很小。例如, 当  $\delta = 1$  时,  $\tau = gt = (2k+1)\pi$  处回复的振幅主要由(8)式中第三项决定。这使得  $\tau = (2k+1)\pi$  处回复的振幅与  $\tau = (2k+1)\pi/2$  处回复的振幅差不多相等(如图 1(b)的所示), 这与单光子过程有很大差异<sup>[10]</sup>。

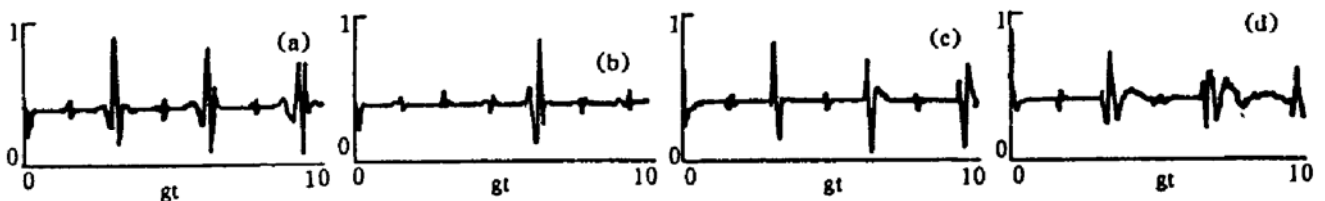


Fig. 1 Time evolution of  $P_4(t)$   $q = 4$ ,  $|z| = 0.8$ , (a)  $\delta = 0$ , (b)  $\delta = 1$ , (c)  $\delta = 10$ , (d)  $\delta = 20$

## 4 辐射场的性质

### 4.1 双模压缩

最近, Loudon 等人引入了双模压缩的概念<sup>[11]</sup>, 把场的双模正交算子定义为:

$$U_1 = (a_1 + a_1^\dagger + a_2 + a_2^\dagger)/2^{3/2}, \quad U_2 = i(a_1^\dagger + a_2^\dagger - a_1 - a_2)/2^{3/2} \quad (9)$$

它们满足对易关系和测不准关系

$$[U_1, U_2] = i/2 \quad (10)$$

$$\langle (\Delta U_1)^2 \rangle \langle (\Delta U_2)^2 \rangle \geq 1/16. \quad (11)$$

$$\text{如果} \quad \langle (\Delta u_i)^2 \rangle < 1/4 \quad (12)$$

$$\text{或者} \quad Q_i = 4\langle (\Delta U_i)^2 \rangle - 1 < 0, \quad (i = 1, 2) \quad (13)$$

成立, 则光场存在双模压缩。

下面以  $U_1$  分量为例, 讨论双模关联  $SU(1,1)$  相干态与两个二能级原子的相互作用过程中辐射场的双模压缩。由于在相互作用过程中, 一个模的光子的产生(湮灭)同时伴随着另一个模的光子的产生(湮灭), 不难验证  $\langle U_1 \rangle = 0$ 。这时, 压缩函数  $Q_1$  可以简单地表示为

$$Q_1 = \langle 2k_0 + k_+ + k_- \rangle - 1$$

其中  $k_0, k_+$  和  $k_-$  为  $SU(1,1)$  李代数的生成元,

$$k_0(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1)/2, \quad k_+ = a_1^\dagger a_2^\dagger, \quad k_- = a_1 a_2. \quad (14)$$

它们对双模数态  $|n_1, n_2\rangle$  的作用由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} k_0 |n_1, n_2\rangle &= \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + 1) |n_1, n_2\rangle, \\ k_+ |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1 + 1, n_2 + 1\rangle, \\ k_- |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{n_1 n_2} |n_1 - 1, n_2 - 1\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

利用文献[11]给出的  $SU(1,1)$  李代数的分解公式, 经过冗长的计算得:

$$Q_1|_{t=0} = [(q+1)/(1-|z|^2)][1+|z|^2-2|z|\cos\varphi] - 1.$$

当  $\varphi = 0$  时, 初始光场呈现最为有效的压缩

$$Q_1|_{t=0} = [(q+1)(1-|z|)/(1+|z|)] - 1. \quad (16)$$

图 2 是通过数值计算得到的  $Q_1$  的时间演化规律, 其中  $|z| = 0.8$ ,  $\varphi = 0$ 。当  $\delta = 0$ ,  $q = 0$  时, 压缩函数  $Q_1$  的最小值大约出现在  $\tau = gt = k\pi$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 处, 如图 2(a) 所示这与文献[9]讨论的单原子情况不同。在单个两能级原子与关联  $SU(1,1)$  相干态的相互作用过程中, 最大压缩出现在  $\tau = gt = (2k+1)\pi$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )。当  $q \neq 0$  时, 压缩的持续时间变短, 而且随时间的推移压缩幅度减小, 如图 2(b) 所示, 当考虑原子间的偶极相互作用时, 压缩的幅度减小, 压缩出现的次数随  $\delta$  的增大而减少。

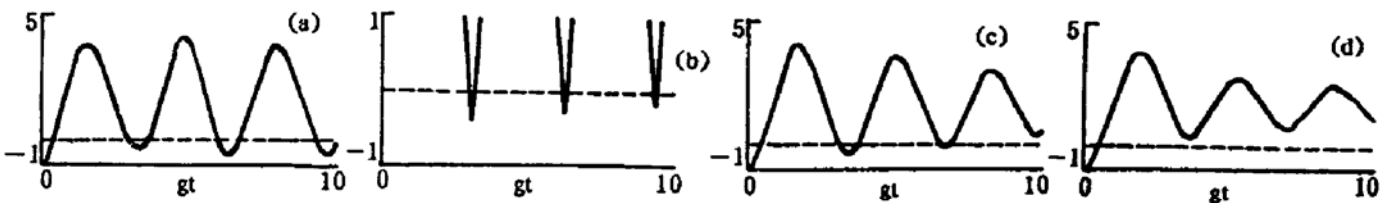


Fig. 2 Time evolution of  $Q_1$ ,  $|z| = 0.8$ ,  $\varphi = 0$ , (a)  $\delta = 0$ ,  $q = 0$ , (b)  $\delta = 0$ ,  $q = 4$ , (c)  $\delta = 5$ ,  $q = 0$ , (d)  $\delta = 10$ ,  $q = 0$

图 3 给出了压缩函数  $Q_1$  随  $\varphi$  的变化规律, 其中  $\delta = 0$ ,  $q = 0$ ,  $|z| = 0.8$ 。由此不难看出

$Q_1$  是  $\varphi$  的周期函数, 周期为  $2\pi$ 。另外, 仅当初始光场呈现压缩时, 辐射场才有可能在随后的时刻呈现压缩, 这和文献[9]讨论的单原子情况有很大差异。

### 4.2 高阶双模压缩

定义两个正交的厄米算符<sup>[13]</sup>

$$X_1 = (k_- + k_+)/2, \quad X_2 = (k_- - k_+)/2i. \quad (17)$$

不难验证,  $X_1$  和  $X_2$  满足下列对易关系和测不准关系:

$$[X_1, X_2] = ik_0, \quad (18)$$

$$\langle(\Delta X_1)^2\rangle\langle(\Delta X_2)^2\rangle \leq |\langle k_0 \rangle|^2/4. \quad (19)$$

如果 或者

$$V_i = [2\langle(\Delta X_i)^2\rangle - |\langle k_0 \rangle|]/|\langle k_0 \rangle| < 0,$$

则称场态存在 SU(1,1) 压缩。当 SU(1,1) 李代数的生成元由(14)式表示时, 上面定义的 SU(1,1) 压缩就是 Hillery 定义的和压缩(Sum squeezing)<sup>[14]</sup>。下面以  $X_1$  分量为例, 讨论双模关联 SU(1,1) 相干态与两个二能级原子的相到作用过程中辐射场的 SU(1,1) 压缩特性。

利用文献[12]给出的 SU(1,1) 李代数的分解公式, 经过冗长的计算得  $t = 0$  时刻的压缩函数  $v_1$

$$v_1|_{t=0} = \frac{2|z|^2}{1 - |z|^4} [ |z|^2 + \cos 2\varphi ]. \quad (20)$$

这说明, 与初始光场的压缩特性不同, 它的 SU(1,1) 压缩与两模之间的光子数差  $q$  无关。

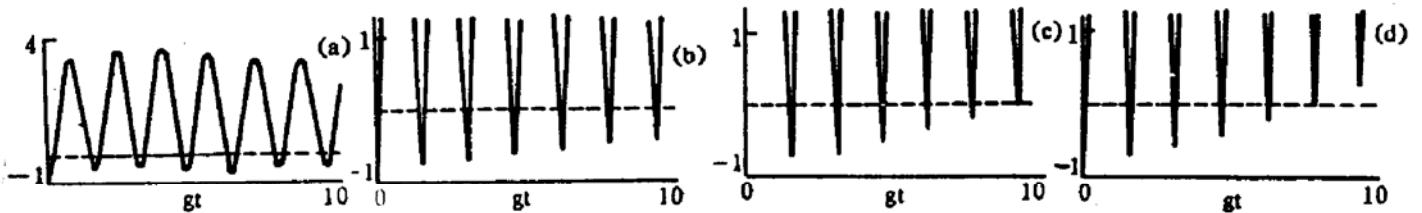


Fig. 4 Time evolution of  $v_1$ . (a)  $q = 0$ , (b)  $q = 4$ , (c)  $q = 8$ , (d)  $q = 12$

图 4 是通过数值计算得到的  $v_1$  的时间演化规律, 其中  $\delta = 0$ ,  $|z| = 0.8$ ,  $\varphi = \pi/2$ 。尽管初始光场的 SU(1,1) 压缩与两模之间的光子数差  $q$  无关, 在它与两个二能级原子的相互作用过程中, 辐射场的 SU(1,1) 压缩的持续时间随  $q$  的增加而减少, SU(1,1) 压缩的回复次数减少, 与辐射场的压缩效应不同, 辐射场在  $\tau = gt = k\pi/2$  处 ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 呈现最大 SU(1,1) 压缩, 其回复的次数是压缩的回复次数的二倍。考虑到原子间的偶极相互作用, 辐射场在随后时刻呈现的最大 SU(1,1) 压缩的幅度减小, SU(1,1) 压缩的回复次数减少, 如图 5 所示。图 6 给出了  $v_1$  随  $\varphi$  的变化情况。由此不难看出,  $v_1$  是  $\varphi$  的周期函数, 周期为  $\pi$ 。如果适当地选取  $\varphi$  使得初始光场不呈现 SU(1,1) 压缩, 则辐射场在  $t > 0$  时刻也不呈现 SU(1,1) 压缩

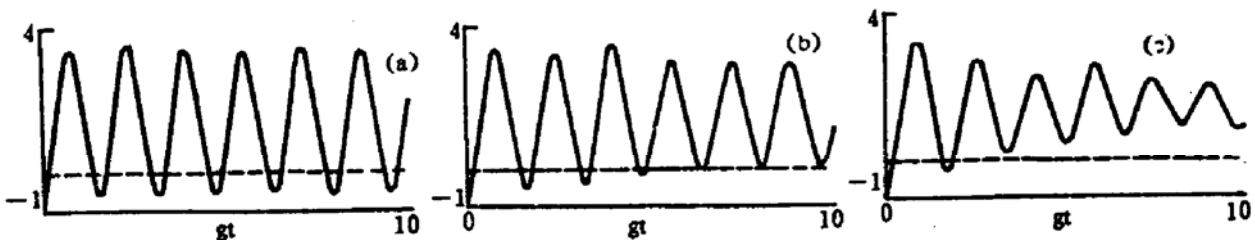


Fig. 5 Time evolution of  $v_1$ .  $q = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$  (a)  $\delta = 1$ , (b)  $\delta = 5$ , (c)  $\delta = 10$

### 4.3 柯西-薛华兹不等式

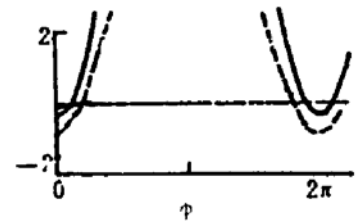


Fig. 3  $Q_1$  versus  $\varphi$ , where  $\delta = 0$ ,  $q = 0$ ,  $|z| = 0.8$ ,  $\tau = 0$  (clotted line) and  $\pi$  (solid line)

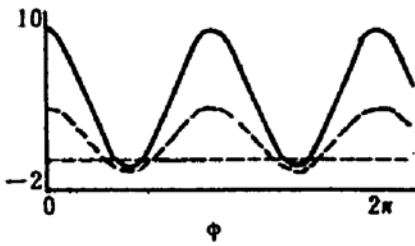


Fig. 6  $v_1$  versus  $\varphi$ ,  $\delta = 0, q = 0, |z| = 0.8, \tau = 0$   
(dotted line) 和  $\pi/2$  (solid line)

对于柯西-薛华兹(Cauchy-Schwartz)不等式:

$$\langle a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \rangle^2 \leq \langle a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 \rangle \langle a_2^\dagger a_2^\dagger a_2 a_2 \rangle \quad (21)$$

如果上述不等式不成立,则表示光场的两模之间是一种非经典相关<sup>[6,8]</sup>。为此,定义:

$$I(t) = [\langle a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 \rangle \langle a_2^\dagger a_2^\dagger a_2 a_2 \rangle]^{1/2} / |\langle a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \rangle| - 1. \quad (22)$$

$I(t) < 0$  意味着柯西-薛华兹不等式不成立。

图 7 表明,  $I(t)$  恒小于 0, 这说明光场的两模之间始终是非经典相关的。这与单个两能级原子与关联双模 SU(1,1) 相干态的相互作用过程<sup>[9]</sup>有很大差别,说明两原子情况更有利于光场的两模之间呈现非经典相关效应。比较图 1 和图 7 可以看出:  $I(t)$  和  $P_1(t)$  呈现类似的振荡特性。

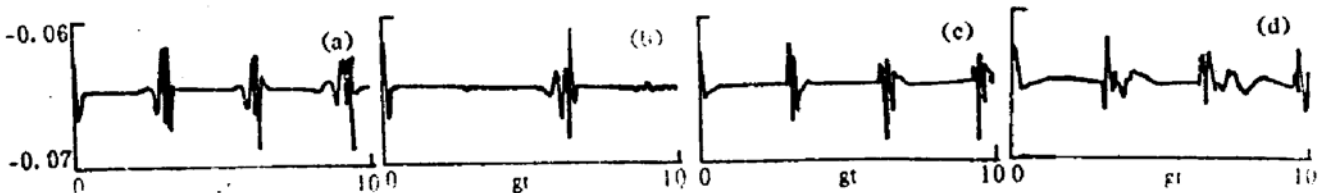


Fig. 7 Time evolution of  $I(t)$

$|z| = 0.8$  (a)  $\delta = 0$ , (b)  $\delta = 1$ , (c)  $\delta = 10$ , (d)  $\delta = 20$

**结 论** 本文研究了关联双模 SU(1,1) 相干态与二个两能级原子相互作用过程中原子的崩溃与回复。辐射场的双模压缩和高阶双模压缩,以及光场的两模之间的非经典相关性质,并讨论了原子间的偶极相互作用对它们的影响。结果表明:

1) 与原子的崩溃与回复以及光场的两模之间的非经典相关效应相比,辐射场的双模压缩和高阶双模压缩更为灵敏地反映出原子间的偶极相互作用; 2) 与单原子双模情况<sup>[9]</sup>相比,两原子双模情况更有利于光场的两模之间呈现非经典相关效应; 3) 辐射场的双模压缩和高阶双模压缩的幅度随  $\delta$  的增加而减小,回复的次数减少。

### 参 考 文 献

- [1] M. Brune, J. M. Raimond, P. Goy *et al.*, Realization of a two-photon maser oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **59**(17): 1899~1902
- [2] Shih-Chuan Gou, Quantum behavior of a two-level atom interacting with two modes of light in a cavity. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **40**(9): 5116~5128
- [3] Shih-Chuan Gou Time evolution of a two-mode Jaynes-Cummings model in the presence of pair-coherent-states. *J. Mod. Opt.*, 1990, **37**(9): 1469~1486
- [4] M. S. Abdalla, M. M. A. Ahmed, A. S. F. Obada, Dynamics of a nonlinear Jaynes-Cummings model. *Physics (A)*, 1990, **162**(1): 215~240
- [5] 刘正东, 四能级原子与双模腔场相互作用中的非线性效应. *物理学报*, 1989, **38**(1): 98~104
- [6] Shih-Chuan Gou, Dynamics of the two-mode Jaynes-Cummings modified by Stark shift. *Phys. Lett. (a)*, 1990, **147**(4): 218~222
- [7] 李高翔, 彭金生, 高 Q Kerr 介质腔中非简并双光子 Jaynes-Cummings 模型中光场的性质. *物理学报*,

1993, 42(9) : 1443~1451

- [8] 宋同强, 王文正等, 比模腔场两偶极相互作用原子的辐射谱. *物理学报*, 1994, 43(12) : 1966~1972
- [9] C. C. Gerry, R. E. Welch, Dynamics of a two-mode two-photon Jaynes-Cummings model interacting with correlated  $SU(1,1)$  coherent states. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1992, 9(3) : 290~297
- [10] A. Joshi, R. R. Puri, S. V. Lawande, Effect of dipole interaction and phase-interrupting collisions on the collapse-and-revival phenomenon in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1991, 44(3) : 2135~2140
- [11] R. Loudon, P. L. Knight, Squeezed light. *J. Mod. Opt.*, 1987, 34(5) : 709~759
- [12] M. Ban, Decomposition formulas for  $SU(1,1)$  and  $SU(2)$  Lie algebras and their application in quantum optics. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1993, 10(8) : 1347~1359
- [13] V. Buzek,  $SU(1,1)$  squeezing of  $SU(1,1)$  generalized coherent states. *J. Mod. Opt.*, 1990, 37(3) : 303~316
- [14] M. Hillery, Sum and difference squeezing of the electromagnetic field. *Phys. Rev.*, 1989, 40(6) : 3147~3155

## Dynamical Properties of Atoms and Field in the Interaction of Two-Mode Field with Two Atoms

Song Tongqiang    Feng Jian    Wang Wenzheng    Xu Jingzhi

(*Institute of Optical Communication, Liaocheng Teachers' College, Liaocheng 252059*)

(Received 16 June 1994)

**Abstract** We study the collapse-revival effects of atom, the two-mode squeezing and the high-order two-mode squeezing of the radiation field, as well as the nonclassical correlation between two modes in the interaction of correlated two-mode  $SU(1,1)$  coherent state with two atoms, and discuss how they are modified by the dipole-dipole interaction between two atoms.

**Key words** correlated two-mode  $SU(1,1)$  coherent state, nonclassical effect, dipole-dipole interaction.