第 15 卷 第 8 期
1995 年 8 月
光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA
Vol. 15, No. 8
August, 1995

q- 光子湮没算符四次方本征态的非经典特性

邵 彬 王荣瑶
(北京理工大学应用物理系，北京 100081) (首都师范大学物理系，北京 100037)

摘 要 构造和讨论了 a_q^4 的四个正交归一本征态压缩和反聚束两种非经典效应，并研究量子群 q 变形参量对此产生的影响。

关键词 量子群， q- 相干态， 非经典效应。

1 引 言

近年来，量子群理论及其在物理学中的可能应用引起了人们的广泛关注，由于相干态在量子光学领域研究中有着十分重要的作用，因此，将普通相干态推广为具有量子群结构的 q- 相干态是有意义的。普通光子湮没算符平方本征态性质曾被详细讨论[1, 2]，而最近文献[3, 4]则构造研究了 q- 光子湮没算符平方 a_q^2 的本征态性质，其结果表明，偶 q- 相干态有压缩而无反聚束效应，奇 q- 相干态有反聚束而绝无压缩效应。本文则进一步构造并研究 q- 光子湮没算符更高次幂 a_q^4 本征态的量子特性以及探讨 q 变形参量对相干态的非经典特性产生的影响。

2 构造 a_q^4 的正交归一本征态

对于 q 变形系统，q- 光子湮灭、产生算符生成 q 变形 Heisenberg-Weyl 代数，其代数关系为

$$a_q a_q^+ - q a_q^+ a_q = q^{-N_q}, \qquad [N_q, a_q^+] = a_q^+, \qquad [N_q, a_q] = -a_q. \tag{1}$$

在 q- Fock 空间中，有

$$\left.\begin{aligned} &a_q|0\rangle_q = 0, && |n\rangle_q = [(a_q^+)^n/\sqrt{[n]!}]\,|0\rangle_q, \\ &a_q|n\rangle_q = \sqrt{[n]}\,|n-1\rangle_q, && a_q^+|n\rangle_q = \sqrt{[n+1]}\,|n+1\rangle_q, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 $N_q = a_q^+ a_q$，$[n] = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$，引入如下四个 q- 相干态：

$$\left.\begin{aligned} |\psi_0\rangle_q &= (1/2)\,C_0[\mathrm{ch}_q(Za^+) + \cos_q(Za^+)]|0\rangle_q = C_0\sum_{n=0}^{\infty}[Z^{4n}/\sqrt{[4n]!}]\,|4n\rangle_q, \\ |\psi_1\rangle_q &= (1/2)\,C_1[\mathrm{sh}_q(Za^+) + \sin_q(Za^+)]|0\rangle_q = C_1\sum_{n=0}^{\infty}[Z^{4n+1}/\sqrt{[4n+1]!}]\,|4n+1\rangle_q, \\ |\psi_2\rangle_q &= (1/2)\,C_2[\mathrm{ch}_q(Za^+) - \cos_q(Za^+)]|0\rangle_q = C_2\sum_{n=0}^{\infty}[Z^{4n+2}/\sqrt{[4n+2]!}]\,|4n+2\rangle_q, \\ |\psi_3\rangle_q &= (1/2)\,C_3[\mathrm{sh}_q(Za^+) - \sin_q(Za^+)]|0\rangle_q = C_3\sum_{n=0}^{\infty}[Z^{4n+3}/\sqrt{[4n+3]!}]\,|4n+3\rangle_q. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

收稿日期:1994 年 4 月 25 日

其中 $Z = re^{i\theta}$ 为复参数，θ 为幅角。q- 三角、q- 双曲和 q- 指数函数分别定义为

$$\left.\begin{aligned} &\cos_q x = (e_q^{ix} + e_q^{-ix})/2, && \sin_q x = (e_q^{ix} - e_q^{-ix})/2i, \\ &\mathrm{ch}_q x = (e_q^{x} + e_q^{-x})/2, && \mathrm{sh}_q x = (e_q^{x} - e_q^{-x})/2, \\ &e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/[n]!. && \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

容易证明这四个 q- 相干态是算符 a_q^4 本征值为 Z^4 的四重简并态，即：

$$a_q^4 |\psi_m\rangle_q = Z^4 |\psi_m\rangle_q, \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{5}$$

它们彼此相互正交

$$_q\langle\psi_m|\psi_{m'}\rangle_q = 0, \qquad m \neq m'. \tag{6}$$

由归一条件 $_q\langle\psi_m|\psi_m\rangle_q = 1$，可求出这四个本征态的归一函数分别为

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= \Big[\sum_{n=0}^{\infty} (ZZ^*)^{4n}/[4n]!\Big]^{-1/2} = [(\mathrm{ch}_q r^2 + \cos_q r^2)/2]^{-1/2}, \\ C_1 &= \Big[\sum_{n=0}^{\infty} (ZZ^*)^{4n+1}/[4n+1]!\Big]^{-1/2} = [(\mathrm{sh}_q r^2 + \sin_q r^2)/2]^{-1/2}, \\ C_2 &= \Big[\sum_{n=0}^{\infty} (ZZ^*)^{4n+2}/[4n+2]!\Big]^{-1/2} = [(\mathrm{ch}_q r^2 - \cos_q r^2)/2]^{-1/2}, \\ C_3 &= \Big[\sum_{n=0}^{\infty} (ZZ^*)^{4n+3}/[4n+3]!\Big]^{-1/2} = [(\mathrm{sh}_q r^2 - \sin_q r^2)/2]^{-1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

在 $|\psi_0\rangle_q$、$|\psi_1\rangle_q$、$|\psi_2\rangle_q$、$|\psi_3\rangle_q$ 组成的四维空间中，由 a_q 的作用，可导致这四个 q- 相干态之间的相互转换，即

$$\left.\begin{aligned} &a_q|\psi_0\rangle_q = (C_0/C_3)|\psi_3\rangle_q, && a_q|\psi_1\rangle_q = (C_1/C_0)|\psi_0\rangle_q, \\ &a_q|\psi_2\rangle_q = (C_2/C_1)|\psi_1\rangle_q, && a_q|\psi_3\rangle_q = (C_3/C_2)|\psi_2\rangle_q, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

类似文献[3]还可证明出这四个 q- 相干态共同构成完备的希尔伯特(Hilbert)空间。

3 a_q^4 本征态的非经典特性

类似 Hillery[1] 定义普通光场复振幅平方的实部和虚部，引入两个 q- 厄米算符。

$$Y_{1q} = (a_q^{+2} + a_q^2)/2, \qquad Y_{2q} = i(a_q^{+2} - a_q^2)/2, \tag{9}$$

它们分别表示 q- 光场复振幅平方的实部和虚部，其对易关系和测不准关系为：

$$[Y_{1q},\ Y_{2q}] = \frac{i}{2}[a_q^2,\ a_q^{+2}], \qquad \langle\Delta Y_{1q}^2\rangle\langle\Delta Y_{2q}^2\rangle \geqslant \frac{1}{16}\,|\langle[a_q^2,\ a_q^{+2}]\rangle|^2, \tag{10}$$

其中 $\langle\Delta Y_j^2\rangle = \langle Y_j^2\rangle - \langle Y_j\rangle^2$，对于态矢 $|\psi_m\rangle_q$，若

$$\Delta_j^m = {}_q\langle\Delta Y_{jq}^2\rangle_q - \frac{1}{4}\,{}_q\langle[a_q^2,\ a_q^{+2}]\rangle_q < 0, \qquad j = 1,\ 2. \tag{11}$$

则表明 q- 光场在 Y_{jq} 分量上存在振幅平方压缩效应，Δ_j^m 值反映其压缩深度。由 $_q\langle a^4\rangle_q = Z^4$，$_q\langle a^{+4}\rangle_q = Z^{*4}$，$_q\langle a^2\rangle_q = {}_q\langle a^{+2}\rangle_q = 0$ 可得：

$$\Delta_j^m = [{}_q\langle a_q^{+2}a_q^2\rangle_q - (-)^j r^4 \cos 4\theta]/2, \tag{12}$$

于是各态的 Δj 具体形式分别为：

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_j^0 &= \frac{r^4}{2}\left\{\frac{[1-(-1)^j\cos 4\theta]\mathrm{ch}_q r^2 - [1+(-1)^j\cos 4\theta]\cos_q r^2}{\mathrm{ch}_q r^2+\cos_q r^2}\right\},\\
\Delta_j^1 &= \frac{r^4}{2}\left\{\frac{[1-(-1)^j\cos 4\theta]\mathrm{sh}_q r^2 - [1+(-1)^j\cos 4\theta]\sin_q r^2}{\mathrm{sh}_q r^2+\sin_q r^2}\right\},\\
\Delta_j^2 &= \frac{r^4}{2}\left\{\frac{[1-(-1)^j\cos 4\theta]\mathrm{ch}_q r^2 + [1+(-1)^j\cos 4\theta]\cos_q r^2}{\mathrm{ch}_q r^2-\cos_q r^2}\right\},\\
\Delta_j^3 &= \frac{r^4}{2}\left\{\frac{[1-(-1)^j\cos 4\theta]\mathrm{sh}_q r^2 + [1+(-1)^j\cos 4\theta]\sin_q r^2}{\mathrm{sh}_q r^2-\sin_q r^2}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

从上述各式可以看出，适当选取 θ, r 值，总可使 $\Delta_j^m(m=0,1,2,3)$ 有小于零的情况存在，说明上述四个 q- 相干态在两个正交分量 $Y_{jq}(j=1,2)$ 上有压缩效应存在。值得一提的是，文献[4] 证明了偶奇 q- 相干态是 $\mathrm{SU_q}(1,1)$ 生成元 $K_1=(K_++K_-)/2$, $K_2=-i(K_+-K_-)/2$ 的最小测不准态，这里 $K_+=Ka_q^{+2}$, $K_-=Ka_q^2$, $K=(q+q^{-1})^{-1}$ 为 $\mathrm{SU_q}(1,1)$ 代数的单模 q- 振子实现。从上述讨论结果看，本文构造的四个 q- 相干态 $|\psi_m\rangle_q(m=0,1,2,3)$ 是 K_1, K_2 算符的压缩态。若引入两个表示 q- 光场复振幅四次方的实部和虚部算符：

$$Z_{1q}=(a_q^{+4}+a_q^4)/2,\qquad Z_{2q}=i(a_q^{+4}-a_q^4)/2, \tag{14}$$

则可讨论四个 q- 相干态在 Z_{1q} 和 Z_{2q} 上的物理性质，由 ${}_q\langle a_q^{+8}\rangle_q=Z^{*8}$, ${}_q\langle a_q^8\rangle_q=Z^8$, ${}_q\langle a_q^{+4}a_q^4\rangle_q=r^8$, 不难得出

$${}_q\langle \Delta Z_{1q}^2\rangle_q={}_q\langle \Delta Z_{2q}^2\rangle_q=\frac{1}{4}[{}_q\langle a_q^4a_q^{+4}\rangle_q-r^8],\qquad {}_q\langle[Z_{1q},Z_{2q}]\rangle_q=\frac{i}{2}[{}_q\langle a_q^4a_q^{+4}\rangle_q-r^8]. \tag{15}$$

因此下式成立：

$${}_q\langle \Delta Z_{1q}^2\rangle_q\,{}_q\langle \Delta Z_{2q}^2\rangle_q=\frac{1}{16}|\,{}_q\langle[a_q^4a_q^{+4}]\rangle_q|^2, \tag{16}$$

表明 $|\psi_m\rangle_q(m=0,1,2,3)$ 是算符 Z_{1q}、Z_{2q} 的最小测不准态。此外，还可证明这四个 q- 相干态既不是算符 $x_{1q}(a_q^++a_q)/2$、$x_{2q}=i(a_q^+-a_q)/2$ 的压缩态，也不是其最小测不准态。

a_q^4 正交归一本征态的另一非经典特性即所谓反聚束效应是由二阶 q- 相干度小于 1 表征的，其定义为：

$$g^{(2)}(0)=\langle a_q^{+2}a_q^2\rangle/\langle a_q^+a_q\rangle^2, \tag{17}$$

由此可求得各态的二阶 q- 相干度为

$$\left.\begin{aligned}
g_0^{(2)}(0)&=1-2\sin_q r^2\,\mathrm{sh}_q r^2/(\mathrm{sh}_q r^2-\sin_q r^2)^2,\\
g_1^{(2)}(0)&=1-(2+2\cos_q r^2\,\mathrm{sh}_q r^2)/(\mathrm{ch}_q r^2+\cos_q r^2),\\
g_2^{(2)}(0)&=1+2\sin_q r^2\,\mathrm{sh}_q r^2/(\mathrm{sh}_q r^2+\sin_q r^2)^2,\\
g_3^{(2)}(0)&=1-(2-2\cos_q r^2\,\mathrm{sh}_q r^2)/(\mathrm{ch}_q r^2-\cos_q r^2).
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

它们随平均 q- 光子数 r^2 的变化如图 1 所示，因 $[n]$ 值在 $q\rightarrow q^{-1}$ 代换下不变，所以只需考虑 $0<q<1$ 的取值范围。从图可以看到在 r^2 的某取值范围内，各态都能表现出反聚束效应，q 值偏离 1 到一定程度($q<0.8$)，各态的二阶相干度不再随 r^2 的增大收敛于 1，而是在 r^2 的相当大的取值范围内呈现周期性振荡变化。q 值偏离 1 越远，某态局部上出现的反聚束效应可能增强或减弱，但整体上反聚束效应则呈明显化趋势，例如 $|\psi_0\rangle_q$ 态，当 $q=0.9$ 时，$|\psi_0\rangle_q$ 在 r^2 的某取值范围内会出现微弱的反聚束效应，随着 q 值逐渐减小，$|\psi_0\rangle_q$ 的反聚束效应在此范围内越来越明显，这表明了 q- 相干态的量子特征趋于显著，若将 q 变形参量用标志量子力学特征的普朗克常数 $\hbar$ 表示[5]，$q=e^{\hbar}$，便可清楚认识到，当 $\hbar\rightarrow 0(q\rightarrow 1)$ 时，此时的 q- 相干态便是

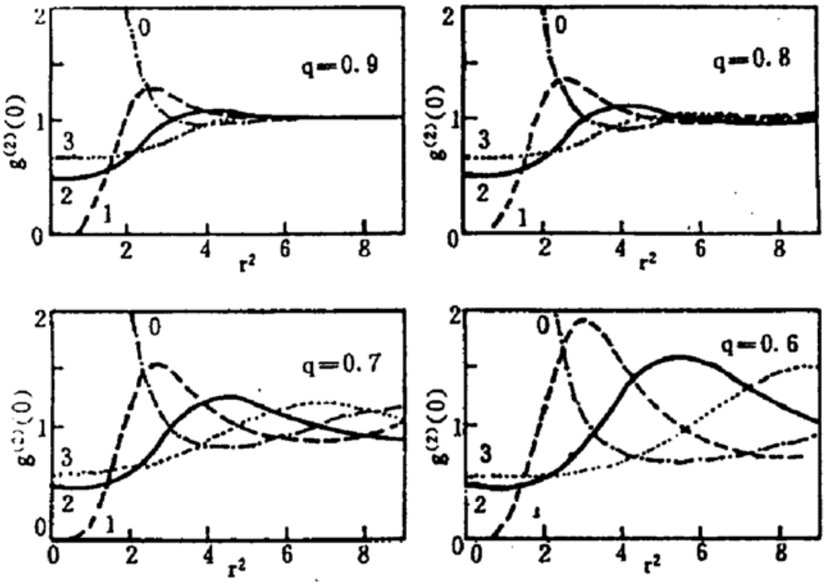

Fig. 1 0, 1, 2, 3 means the second-order q-correlation of the states $|\psi_0\rangle_q$, $|\psi_1\rangle_q$, $|\psi_2\rangle_q$, $|\psi_3\rangle_q$, respectively

最接近经典的量子光场态，这与 q 逐渐接近于 1，各态整体上表现的反聚束效应趋于减弱的特征是相吻合的。

结 语 本文构造并讨论了 a_q^4 的四个正交归一本征态的量子特性。当 $q\to 1$ 时则回复到普通光子湮没算符四次方本征态性质的讨论中[6]. 实际计算表明，q变形参量对q-相干态存在的压缩和反聚束两种非经典效应的强度大小有明显影响。因此，可利用 q 变形参量来控制各本征态的相干程度。这对深入认识量子群q变形参量的作用及其物理内涵是有帮助的。将普通光子湮没算符任意 K 次幂 a^K 本征态性质的讨论[7]推广为 q- 光子情形也很有意义，将另文报道。

参 考 文 献

[1] M. Hillery, Amplitude-squared squeezing of the electromagnetic field. *Phys. Rev.* (*A*), 1987, **36**(8) : 3796～3802

[2] Xia Yunjie, Gou Guangcan, Nonclassic properties of even and odd coherent states. *Phys. Lett.* (*A*), 1989, **136**(6) : 281～283

[3] 匡乐满，王发伯，曾高坚， 偶奇相干态的 q-类比. *光学学报*, 1993, **13**(11) : 1008～1011

[4] Kuang Leman, Wang Fabo, The $SU_q(1,1)$ q-coherent states and their nonclassic properties. *Phys. Lett.* (*A*), 1993, **173**(3) : 221～227

[5] 阎 宏，常 哲，郭汉英， q变形转动振子模形(Ⅰ). *物理学报*, 1991, **40**(9) : 1377～1386

[6] 彭石安，苑晋宁，封开印， a^4 的正交归一本征态及其量子统计性质. *量子电子学*, 1989, **6**(4) : 306～311

[7] 时维春，马爱群， 光子消灭算符 K 次幂本征态的量子统计性质. *光学学报*, 1992, **12**(10) : 902～906

The Eigenstates of the Fourth Power of q-Photon Annihilation Operator and Their Nonclassic Properties

Shao Bin

(*Department of Applied Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081)

Wang Rongyao

(*Department of Physics, Capital Normal University, Beijing* 100037)

(Received 25 April 1994)

Abstract In this paper, the squeezing and anti-bunching effects of the orthonormalized eigenstates are disscused. The relation to the q-deformed parameter is analyzed.

Key words quantum group, q-coherent state, nonclassic effect.