

基于等效衰减矢方法的非均匀 光波导色散方程*

詹 黎 曹庄琪

(上海交通大学应用物理系, 上海 200030)

摘 要 利用转移矩阵理论和等效衰减矢的概念, 以此为根据分析了任意折射率分布平板波导的模式传输特性, 导出了意义明确的非均匀平板波导的色散方程的严格的解析解, 并指出了 WKB 法的局限性, 数值计算的结果表明本文所得公式的结果和严格的数值解非常接近, 表明本文所得的公式是严格的。

关键词 光波导, 色散方程。

1 引 言

非均匀平板光波导的研究是光电子学的重要内容, 尽管这类光波导可通过麦克斯韦方程和相应的边界条件求解而得到传输模的色散特性。但是只有有限的几种折射率分布^[1,2], 具有严格的解析解。绝大多数的非均匀平板波导需藉助于数值解或近似方法求解。数值解尽管具有良好的精确性, 但不能直观地反映光波导的物理本质, 而且计算工作较为繁重。近似方法中, WKB 法由于其简单的解析公式和清晰的物理意义而得到广泛的应用, 但 WKB 法因其本身的局限性, 对截止模式或单模波导不再有效^[3], 而且 WKB 法因没有考虑到折射率梯度层间反射^[4], 因此没有足够的精确度, 这一点将在本文得到更为明确的表述。其他近似方法^[5~7]由于没有良好的精确性或者是只适用于某一种特定折射率分布, 因此没有得到广泛的应用。

本文把非均匀光波导看成是一个无限多折射率连续变化的多层膜结构, 并在数学形式上, 和转折点外光场一样, 把波导中的每一点(包括两个转折点之间的振荡光场)的光场定义为一个等效的指数衰减光场, 其中的衰减系数是反映光场衰减(或称变化)快慢和衰减方向的矢量, 称之为等效衰减矢。由于这里的指数衰减光场只是数学形式的统一, 并没有改变它的物理性质, 因此转移矩阵理论对它同样适用。最后利用转移矩阵方法和相应的边界条件, 得到了任意折射率分布的非均匀平板波导的色散方程的解析解。文中得到的色散方程(积分形式), 在特定条件下, 可转化为三层波导的色散方程; 如果忽略折射率梯度引起的层间反射项, 并把转折点处的相移作 $\pi/4$ 近似, 即是 WKB 近似的色散方程, 需要指出的是本文所得色散方程, 不仅适用于任意折射率分布, 而且避免了在文献[4]中的色散方程的递推形式。最

* 本课题得到国家自然科学基金资助。

收稿日期: 1994年7月13日; 收到修改稿日期: 1995年1月11日

后的数值计算的结果表明, 本文所得公式的结果非常接近于数值解, 其误差来源于转折点处的等效衰减矢 P_i 的近似性。一旦严格确定此边界条件的值, 结果将和严格的数值解完全一致。但从色散方程的本身来说, 它是严格的。

2 理论分析

如图 1 所示的任意折射率分布的非均匀平板波导, 其中 n_0 、 n_2 分别为波导覆盖层和衬底的

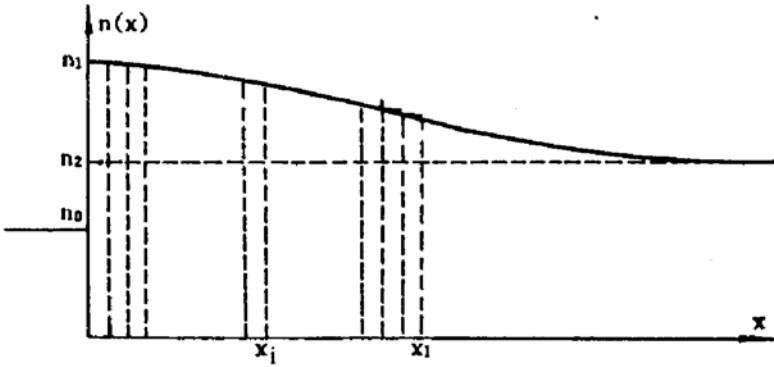


Fig. 1 Plot of inhomogeneous planar waveguide with arbitrary refractive index profile

的折射率, n_1 为波导表面的折射率, x_i 为转折点处的坐标。由于非均匀光波导可看成是无限多层折射率渐变的多层膜结构, 因此可利用转移矩阵理论求解。首先把 $[0, x_i]$ 区间分成为 l 等分, 每一小区域的厚度为 h , 即有 $x_i = lh$, 当 $l \rightarrow \infty$ 时, $h = dx \rightarrow 0$ 。因此, 对 TE 模, 相应于第 i 个小区域的转移矩阵分别为^[4]

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos(k_i h) & -(1/k_i) \sin(k_i h) \\ k_i \sin(k_i h) & \cos(k_i h) \end{bmatrix}_{(i=1, 2, \dots, l)} \quad (1)$$

$$k_i = (k_0 n_i^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (2)$$

β 为光导波纵向传播常数, 对转折点, 应有 $\beta = k_0 n(x_i)$, $k_0 = 2\pi/\lambda$ 为自由空间的波数, λ 为真空光波长, $n_i = n(x_i)$ 。利用 $x = 0$ 和 $x = x_i$ 处的边界条件, 可得以下矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} E_y(0) \\ E_y'(0) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^l M_i \begin{bmatrix} E_y(x_i) \\ E_y'(x_i) \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 $E_y(0)$, $E_y(x_i)$ 是 TE 模在 $x = 0$ 和 $x = x_i$ 处的电场分布, 一撇表示对 x 的导数。容易知道, 在 $x < 0$ 区域光场分布是指数衰减函数, 即:

$$E_y(x) = A_0 \exp(P_0 x) \quad (x < 0) \quad (4)$$

式中

$$P_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2} \quad (5)$$

其中 A_0 为待定系数, P_0 为衰减系数。但对于 $[0, x_i]$ 和 $x > x_i$ 区域的光场以何种形式分布并不知道, 尽管在 $x > x_i$ 区域光场也是衰减的, 但其衰减形式与具体的折射率分布有关。 $[0, x_i]$ 区域的光场应是驻波形式的振荡解。但不管怎样, 在数学形式上, 总可以把某一点 x_i 的光场表示为一等效的指数衰减光场, 来代替该点外区域的实际光场分布, 对于平板波导, 只需考虑 x 上的分量, 因此可得

$$E_y(x_i) = A_i \exp[-P_i(x - x_i)] \quad (6)$$

式中的 P_i (或 $P(x_i)$) 定义为 x_i 的等效衰减矢, 其物理意义为表示等效指数光场的衰减 (或称变化) 大小和衰减方向, A_i 为待定系数, 因此, 等效衰减矢存在以下变界条件:

$$P(0) = -P_0, \quad P(x_i) = P_i \quad (7)$$

(7) 式中的 P_i 为 x_i 处的等效衰减矢 (或称等效衰减系数^[4])。

根据方程 (3)、(6) 和 (7) 可得到下式:

$$(-P_0 1) M_1 M_2 \cdots M_l \begin{pmatrix} 1 \\ -P_l \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

利用矩阵(1)化简方程(8), 可得:

$$k_1 h = m\pi + \operatorname{tg}^{-1}(p_0/k_0) + \operatorname{tg}^{-1}(p_2/k_1) \quad (9)$$

$$P_i = k_i \operatorname{tg} [\operatorname{tg}^{-1}(p_{i+1}/k_i) - k_i h] \quad (i = 2, 3, \dots, l) \quad (10)$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, $\operatorname{tg}^{-1}(p_2/k_1)$ 可作以下化简:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^{-1}(p_2/k_1) &= \operatorname{tg}^{-1}\{k_2/k_1 \operatorname{tg} [\operatorname{tg}^{-1}(p_3/k_2) - k_2 h]\} \\ &= \operatorname{tg}^{-1}\{[1 + (k_2 - k_1)/k_1] \operatorname{tg} [\operatorname{tg}^{-1}(p_3/k_2) - k_2 h]\} \\ &= \operatorname{tg}^{-1}(p_3/k_2) - k_2 h + p_2/(k_2^2 - p_2^2) k_2/k_1(k_2 - k_1) \end{aligned} \quad (11)$$

同样可得

$$\operatorname{tg}^{-1}(p_i/k_{i-1}) = \operatorname{tg}^{-1}(p_{i+1}/k_i) - k_i h + p_i/(k_i^2 - p_i^2) k_i/k_{i-1}(k_i - k_{i-1}) \quad (12)$$

由此可得

$$\operatorname{tg}^{-1}(p_2/k_1) = -\sum_{i=2}^l k_i h + \sum_{i=2}^l \frac{p_i}{(k_i^2 - p_i^2)} (k_i - k_{i-1}) + \operatorname{tg}^{-1}(P_l/k_{l-1}) \quad (13)$$

将(13)式代入(9)式, 并取微分, 可得任意折射率分布的非均匀平板波导的色散方程:

$$\int_0^{x_l} k(x) dx - \int_0^{x_l} \frac{P(x)}{k^2(x) + P^2(x)} \frac{dk(x)}{dx} dx = m\pi + \operatorname{tg}^{-1} \frac{P_0}{k_1} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{P_l}{k_l} \quad (14)$$

$$k_1 = [k_0^2 n^2(0) - \beta^2]^{1/2}, \quad k_l = [k_0^2 n^2(x_l) - \beta^2]^{1/2} \quad (15)$$

如果把(10)式取为微分形式, 它和等效衰减矢的边界条件组成微分形式的非均匀平板波导的色散方程:

$$\frac{dP}{dx} = k^2(x) + P^2(x), \quad P(0) = -P_0, \quad P(x_l) = P_l \quad (16)$$

3 讨 论

由方程(14)和(16)组成的任意折射率分布的非均匀平板波导色散方程, 适用于渐变折射率(两个转折点之间)光波导的传输模的特性分析。为了清楚地看出本文所得色散方程的物理意义作以下分析:

3.1 三层平板波导

对于三层平板波导, 由于 $dk/dx = 0$, 根据色散方程(14)可得:

$$k x_l = m\pi + \operatorname{tg}^{-1}(p_0/k) + \operatorname{tg}^{-1}(p_2/k) \quad (17)$$

如果在(17)式中, 用薄膜厚度 h 代替 x_l , 而且:

$$k \equiv k_1 \equiv k_2 = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad P_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2}, \quad P_2 \equiv P_l = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} \quad (18)$$

其中 n_0 、 n_1 、 n_2 分别为衬底, 薄膜和覆盖层的折射率, 可见(18)式即是“标准”的三层平板波导的色散方程。

3.2 WKB 近似方法

如果在(15)式中, 忽略由折射率梯度引起的层间反射项 $\int_0^{x_l} \frac{P}{k^2 + p^2} \frac{dk}{dx} dx$, 并用最靠近转折点处的衰减系数代替转折点外整个区域的衰减系数, 即代替该点的等效衰减矢, 因此:

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{p_i}{k_i} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\lim_{x \rightarrow x_i^+} [\beta^2 - k_0^2 \cdot n^2(x)]^{1/2}}{\lim_{x \rightarrow x_i^-} [k_0^2 \cdot n^2(x) - \beta^2]^{1/2}} = \pi/4 \quad (19)$$

由此方程(15)式还原成 WKB 近似的色散方程:

$$\int_0^{x_i} k(x) \cdot dx = m\pi + \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{p_0}{k_1} \quad (20)$$

以上分析说明 WKB 近似的实质是忽略由折射率梯度引起的层间反射, 并用最靠近转折点处的衰减系数代替转折点外整个区域的等效衰减系数。

4 数值结果和比较

为了求得非均匀光波导色散方程的数值结果, 还需要做的工作是确定最靠近转折点的等效衰减矢 P_i 。由于已经把 x_i 处的光场等效成一个指数衰减场, 因此, 可以用在光场穿透深度 $1/P_i$ 上衰减系数的平均值代替 P_i ^[4], 即由下式定义:

$$\int_{x_i}^{x_i+1/P_i} \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n^2(x)} dx = 1 \quad (21)$$

由方程(21)得到的 P_i 为一不等于 0 的有限值, 而 $k_i = 0$, 因此:

$$\operatorname{tg}^{-1} (p_i/k_i) = (\pi/2) \quad (22)$$

为此色散方程则转化为:

$$\int_0^{x_i} k(x) \cdot dx - \int_0^{x_i} \frac{P}{k^2 + P^2} \cdot \frac{dk}{dx} \cdot dx = m\pi + \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{P_0}{k_1} \quad (23)$$

为了检验本文所导出的色散方程的准确性, 考虑以下三种典型的折射率分布。

1) 指数分布:

$$n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) \exp(-x/d) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (24)$$

2) 高斯分布:

$$n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) \exp(-x^2/d^2) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (25)$$

3) 余误差分布:

$$n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) \operatorname{erfc}(x/d) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (26)$$

并定义归一化参数:

$$V = k_0 d (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \quad (23)$$

$$b = \frac{n_0^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}, \quad n_* = \beta/k_0 \quad (24)$$

并选取 $n_0 = 1.0$, $n_2 = 2.177$ 和 $n_1^2 - n_2^2 = 0.187$, d 作为 v 变化的参数, 由本文所得色散方程式计算得到的 b 值与精确值、WKB 近似及其他近似方法比较的结果分别列于表 1 表 2 和表 3。

对于指数分布, 由表 1 可以看出, 在大的 v 变化范围内, 本文公式的所得的 b 精度远高于 WKB 近似, 约高一个数量级。

对高斯分布和余误差分布, 在取四位有效数字情况下, 从表 2 和表 3 可以看出本文结果

与精确解符合得相当好, 本文公式的精度不仅远高于 WKB 近似, 而且还优于余弦指数(CE)方法^[6]以及厄密高斯(HG)近似^[7]等近似方法, 尤其在小的 V 值范围, 即接近截止时, 本文公式仍能达到很高的精度, 而 WKB 近似、HG 近似对接近截止时的解是不适用的, 从而使误差变得非常大。

本文公式的数值结果的误差来源于转折点处的等效衰减矢 P_i 的近似性, 一旦严格确定此边界条件的值, 结果将和严格的数值解完全一致。但从色散方程的本身来说, 它是严格的。

Table 1. Exponential profile

V	exact	this paper		WKB	
	b	b	$\Delta b \times 10^{-3}$	b	$\Delta b \times 10^{-3}$
1.5	0.035007	0.035129	0.12	0.037833	2.83
2.0	0.104954	0.104567	0.39	0.108613	3.66
2.5	0.171442	0.170839	0.60	0.175311	3.87
3.0	0.229188	0.228496	0.69	0.233076	3.89
3.5	0.278650	0.277927	0.72	0.282486	3.84
4.0	0.321179	0.320446	0.73	0.324927	3.75
5.0	0.390292	0.389580	0.71	0.393845	3.55
6.0	0.444075	0.443399	0.68	0.447436	3.36
7.0	0.487244	0.486607	0.64	0.490429	3.19
8.0	0.522776	0.522176	0.60	0.525803	3.03

Table 2. Gaussian profile

V	b (TE ₀)				
	exact	this paper	CE	HG	WKB
2.0	0.0817	0.0814	0.0785	0.0051	0.0104
3.0	0.2750	0.2741	0.2699	0.2163	0.2071
4.0	0.4133	0.4124	0.4079	0.3702	0.3629

Table 3. Complementary error profile

V	b (TE ₀)				
	exact	this paper	CE	HG	WKB
3.0	0.0675	0.0672	0.0642	0.0154	0.0282
4.0	0.1694	0.1687	0.1644	0.1211	0.1293

结 论 本文在利用转移矩阵理论的基础上, 并运用等效衰减矢概念, 导出了任意折射率分布的非均匀平板波导的色散方程的解析解, 并克服了 WKB 近似的局限性, 通过数值比较, 表明我们得到的解析公式是严格的, 并且适用于任意折射率分布的平板波导。另外, 本文的结果可方便地推广到 TM 模的情况。

参 考 文 献

- [1] E. M. Conwell, Modes in optical waveguides formed by diffusion. *Appl. Phys. Lett.*, 1973, 23(6): 328~329
- [2] A. K. Ghatak, L. A. Kraus, Propagation of waves in a medium varying transverse to the direction of propagation. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1974, QE-10(4): 456~467
- [3] M. J. Adams, The Claded parabolic index profile waveguides analysis and application to strip-geometry lasers. *Opt. & Quant. Electron.*, 1978, 10(1): 17~29
- [4] 曹庄琪, 非均匀平板波导的色散方程. *光学学报*, 1994, 14(5): 12
- [5] A. Kumar, K. Thyagarajan., A. K. Ghatak, Modes inhomogeneous slab waveguides. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1974, QE-10(2): 902~904
- [6] K. Mishra, A. Sharma, Analysis of single mode inhomogeneous planar waveguides. *J. Lightwave Technol.*, 1986, LT-4(2): 201~204
- [7] S. K. Korotky, W. J. Minford, L. L. Buhl *et al.*, Modes size and method for estimating the propagation constant of single-mode Ti:LiNbO₃ strip waveguides. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1982, QE-18(10): 1796~1801

Dispersion Equation of Inhomogeneous Planar Optical Waveguides Based on Concept of Equivalent Attenuated Vector

Zhan Li Cao Zhuangqi

(Department of Applied Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

(Received 13 July 1994; revised 11 January 1994)

Abstract Based on the transfer-matrix technique, the concept of an equivalent attenuated vector is proposed and used to analyse the characteristics of the propagating modes in the planar optical waveguides with arbitrary refractive index profile. For the dispersion equation in inhomogeneous planar optical waveguides, an exact analytic solution is obtained. A comparison with other approximations and the exact numerical results show that our dispersion equation is exact.

Key words optical waveguide, dispersion equation.