

# 变形镜波前校正非线性响应 剩余位相方差分析

吴毅 王英俭 龚知本

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031)

**摘 要** 报道了采用简化的物理模型及数值仿真方法对变形镜非线性响应如何影响自适应光学系统的波前校正剩余位相方差所进行的分析。给出了由于变形镜非线性响应所引起的波前校正剩余位相方差为  $k(d/r_0)^b$ , 其中  $k$ 、 $b$  均与实际系统参数有关。

**关键词** 变形镜, 非线性响应, 波前校正。

## 1 引 言

众所周知, 自适应光学系统在校正激光束通过大气传输由于湍流效应引起的波前畸变时存在种种误差。如波前传感探测误差, 变形镜波前复原误差, 自适应系统有限带宽误差以及非等晕性误差<sup>[1]</sup>。这些误差的累积直接影响到自适应光学系统对畸变波前校正的效率。上述误差主要来源于探测系统的信噪比、有限单元变形镜作为空间滤波光学元件的空间滤波函数和系统采样, 控制的整体带宽的限制等等。文献[1]对这些误差源给予了较详细的论述。作者近期在进行自适应光学系统校正湍流效应的实验中观测到定量化的校正效率在计及上述种种误差源之后, 仍然与理论计算值之间存在一定的差别。经过分析与对变形镜电压驱动后的影响函数测量发现变形镜的非线性响应效应是上述差别的主要来源。而通常的考虑变形镜影响函数的解耦运算是线性的<sup>[2]</sup>。它反映在波前校正的剩余位相方差中存在一个附加项。这一误差项在国外有关文献中没有加以报道, 或许是因为所研究的变形镜系统线性动态范围较大, 如林肯实验室的69单元变形镜<sup>[3]</sup>, 其单点驱动行程为 $\pm 14 \mu\text{m}$ , 这样在通常波前起伏状态下变形镜非线性响应误差的影响并不显著。而当变形镜驱动行程较小(这主要受限于变形的镜面材料及其力学效应), 湍流位相起伏较大时变形镜非线性响应误差的影响就显得突出。

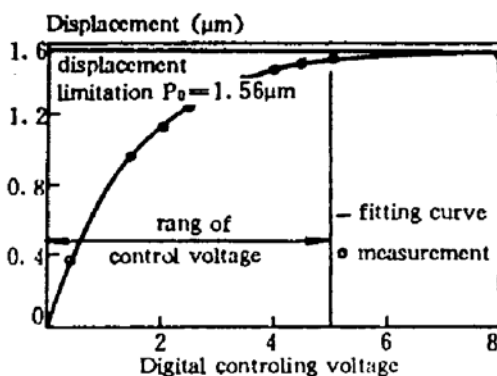


Fig. 1 The nonlinear response of the deformable mirror displacement vs the control voltage

本文利用简化的物理模型和数值仿真方法对变形镜非线性响应如何影响自适应光学系统波前

校正的剩余位相方差进行了分析。给出了由于变形镜非线性响应引起的附加剩余位相方差为  $k(d/r_0)^b$ , 其中  $d$  为变形镜驱动器平均间距,  $r_0$  为湍流横向相干长度, 而  $k$  是与系统极限校正能力有关的参数。本文的实物模型是中国科学院光电技术研究所研制的 37 单元变形镜自适应光学系统。该系统  $k$  值为 0.023 (波长取 0.6328  $\mu\text{m}$ ),  $b$  参数在简化的分析模型中为 3.3, 在以实物为模型的仿真中其值为 4.3。图 1 是实测的变形镜非线性响应曲线。

## 2 简化模型方法

变形镜的位移量与驱动电压之间的函数关系称为变形镜的响应。由于受镜面材料和力学效应的影响, 变形镜的响应通常是非线性的, 而且其位移量亦是有限的。根据图 1 的测量结果, 将变形镜的点驱动响应拟合为:

$$P(v) = (v/|v|) P_0 \{1 - \exp(-a|v|/P_0)\} \quad (1)$$

其中  $v$  是驱动电压,  $a$  是电压与位移量之间的线性转换系数,  $P_0$  是变形镜的极限位移量。由 (1) 式可知当  $P_0$  较大时, 取一级展开的近似  $P(v) = av$  即为变形镜的线性动态响应。令  $P_1 = a|v|$ , 可将 (1) 式写为:

$$P(v) = (v/|v|) P_0 \{1 - \exp(-P_1/P_0)\} \quad (2)$$

由于自适应光学系统经过波前探测、复原控制解耦获得的驱动电压是经过线性运算而来的, 也就是  $P_1$  值。而实际变形镜位移量  $P$  是 (2) 的式表征形式。它相当于对  $P_1$  的一个非线性衰减过程。

由文献[1]可知, 变形镜波前复原的剩余位相方差为:

$$\sigma^2 = \int_A [\Phi - \Phi_{DM}]^2 ds \quad (3)$$

其中  $\Phi_{DM} = F^{-1}[L(\rho)F(\Phi)]$  表示变形镜面型,  $\Phi$  表示湍流波前,  $F$ 、 $F^{-1}$  分别表示正、反傅里叶变换,  $L(\rho)$  表示变形镜面型空间滤波函数,  $A$  表示孔径面积,  $\rho$  为空间频率。为简化起见, 取  $L(\rho) = 1$  近似。其物理意义是忽略了空间频率对变形镜波前复原的影响, 相当于逐点校正近似。另一方面上述近似在  $\rho < 1/2d$  时是基本成立的, 因为通常以超高斯形式表述<sup>[1]</sup>的  $L(\rho)$  在  $\rho < 1/2d$  时约等于 1, 其中  $d$  表示变形镜驱动器的平均间隔。此时若不考虑变形镜非线性响应的影响  $\Phi_{DM} = \Phi$ , 也就是说变形镜的校正误差为零。作上述近似, 目的是在简化方式下突出变形镜非线性响应的影响。结合 (2) 式与 (3) 式的表述, 用  $\Phi_{DM} = \Phi_0 [1 - \exp(-\Phi/\Phi_0)]$  的形式描述变形镜面型, 并记  $\sigma_{\text{non}}^2 = \sigma^2$  (表示仅含变形镜非线性响应的波前复原方差):

$$\sigma_{\text{non}}^2 = \int_A \{\Phi - (\Phi/|\Phi|) \Phi_0 [1 - \exp(-|\Phi|/\Phi_0)]\}^2 ds \quad (4)$$

其中  $\Phi_0 = 2\pi P_0/\lambda$  (rad) 表示变形镜的前波极限校正量。由图 1 可知  $\Phi_0 = 15.49$  rad。

考虑  $\Phi/\Phi_0 < 1$ , 将  $\exp(-\Phi/\Phi_0)$  展开至二阶项并代入 (4) 式, 有:

$$\sigma_{\text{non}}^2 = \int_A \Phi^4 ds / 4 \Phi_0^2 \quad (5)$$

由于湍流随机波前的起伏服从正态分布, 根据正态分布统计原理, 其四阶矩与二阶矩有  $B_4 = 3 B_2^2$  的关系, 所以 (5) 式变为:

$$\sigma_{\text{non}}^2 = 3 \left( \int_A \Phi^2 ds \right)^2 / 4 \Phi_0^2 = 3 \sigma_{\text{unc}}^4 / 4 \Phi_0^2 \quad (6)$$

其中  $\sigma_{\text{unc}}^2$  是未校正湍流波前方差。因为自适应光学系统是有独立整体波前倾斜校正的,  $\sigma_{\text{unc}}^2$  可

表示为:

$$\sigma_{\text{nac}}^2 = 0.135(D/r_0)^{3/5} \quad (7)$$

$D$  表示探测及波前复原孔径直径, 将其换算成均匀分布驱动器的平均间距  $d$  有  $D = d \sqrt{N}$ ,  $N$  为驱动器数目。于是:

$$\sigma_{\text{nac}}^2 = 0.0137(N^{3/5}/\Phi_0^2)(d/r_0)^{10/3} \quad (8)$$

(8)式即为本文利用简化的物理模型获得的变形镜非线性响应所导致的波前复原校正附加剩余位相方差。它与  $(d/r_0)$  关系的幂次 ( $b = 10/3$ ) 两倍于线性拟合校正方差(一般认为  $\sigma_{\text{lin}}^2 = 0.349(d/r_0)^{3/5}$ )<sup>[1]</sup>, 并且其系数与驱动器数目及变形镜极限校正量有关。若以该 37 单元变形镜为例,  $k = 0.0137(N^{3/5}/\Phi_0^2) = 0.023$ 。

### 3 数值仿真方法

由于变形镜的有限单元驱动和响应面型使得变形镜不可能对所有空间频率的波前起伏进行校正, 上述模型法中  $L(\rho) = 1$  的近似与实际系统是有差别的, 而且在(8)式的推导中也仅仅保留了二阶展开项。因此, (8)式在什么样的空间频率段才能反映变形镜非线性响应的附加校正方差、变形镜的有限单元驱动和响应面型如何构成变形镜对湍流波前的总体校正误差是本文要解决的问题。但是引入一般  $L(\rho)$  的函数关系对(3)式进行求解是有一定困难的, 因此本文采用结合实际系统参数的数值仿真方法对上述问题进行了研究。在数值仿真中对变形镜驱动点的响应引入(1)式所描述的非线性衰减, 面型影响函数为高斯型, 其中的偶合系数

为 0.13。另一方面校正剩余位相方差与  $(d/r_0)$  的关系原则上讲是在统计平均意义上成立的, 即每一次实现中的剩余方差与  $(d/r_0)$  的关系服从某一统计分布。本文的数值研究采用的是文献[5]的数值仿真方法。对每一湍流强度的波前校正进行 5000 次随机实现, 将包含非线性部分的总的剩余位相方差减去线性响应的剩余位相方差, 进行统计平均后获得  $\sigma_{\text{non}}^2$  与  $(d/r_0)$  的关系。数值仿真中通过取较大的  $P_0$  值获得线性响应的剩余位相方差的统计值[它满足  $\sigma_{\text{lin}}^2 = 0.349(d/r_0)^{3/5}$ ], 而取实测的  $P_0$  值获得总体剩余位相方差。仿真结果与(8)式的计算结果示于图 2。

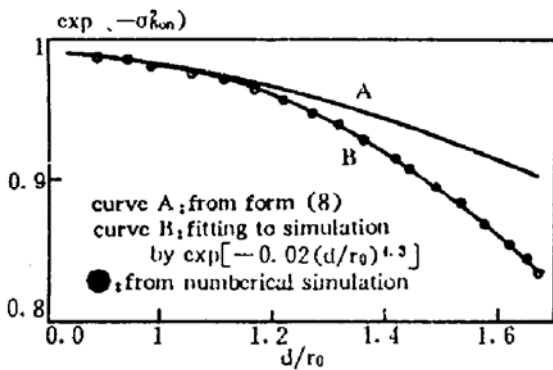


Fig. 2 The influence of nonlinear response of deformable mirror to the residual wavefront variance after correction

### 4 结果与讨论

利用简化的物理模型本文获得变形镜非线性响应影响下的波前校正剩余位相方差表达式[(8)式]。可以看出它与驱动器数目  $N$  成正比, 与  $\Phi_0$  成反比, 同时与  $d/r_0$  的关系在幂次上亦大于线性响应时的变形镜波前复原剩余位相方差(即  $\sigma_{\text{lin}}^2 = 0.349(d/r_0)^{3/5}$ ), 也就是说当  $d/r_0 > 1$  时, 方差增长速度较快。对于该实际变形镜的数值仿真值可以用  $\sigma_{\text{non}}^2 = 0.02(d/r_0)^{4.3}$  来拟合, 其幂次大于 3.3, 原因是在获得(8)式时, 用了  $L(\rho) = 1$  的近似, 这说明高空间频率的波前起伏对非线性响应校正误差的影响是很大的, 尤其是当  $d/r_0 > 1$  时。

从图2中可以看到在 $d/r_0 < 1$ 时,(8)式的计算结果与数值仿真的结果基本一致,这表明 $L(\rho) = 1$ 的近似在 $d/r_0 < 1$ 时基本成立。其原因是通常湍流的空间相关距离为 $d_0 = 2r_0$ ,因而其特征空间频率为 $\rho_0 = 1/d_0$ ,如果将 $\rho < 1/2d$ (此时 $L(\rho) = 1$ 基本成立)的条件用于 $\rho_0 < 1/2d$ ,即有 $d/r_0 < 1$ 。因为人们通常关心的是在 $d/r_0 < 1$ 时的自适应光学系统的校正效率,所以(8)式可以成为考虑变形镜非线性响应所引起的附加剩余位相方差的基本判断标准。数值仿真所获得的系数 $k = 0.02$ 和幂指数 $b = 4.3$ 是实际变形镜的指标,而(8)式只要求均匀排布方式下的高斯面型影响函数。

在高空间频率段用简化的模型来分析变形镜非线性响应所致的附加剩余位相方差的误差较大。数值仿真必需结合实际系统的指标。就该变形镜而言,当令 $0.349(d/r_0)^{4.3} = 0.02(d/r_0)^{4.3}$ 时,可以得到 $d/r_0 = 0.349/0.02 = 2.9$ 。这表明,当 $d/r_0 > 2.9$ 时,由变形镜的非线性响应所引起的附加剩余位相方差将越过线性响应波前校正的剩余位相方差。

总之,在研究自适应光学系统校正大气湍流波前畸变的效率时,对变形镜非线性响应所造成的复原波前剩余位相方差附加项的舍取,决定于系统参数和它的极限校正能力,同时还与湍流效应波前起伏强度有关。当研究变形镜非线性响应受低空间频率起伏影响(即 $d/r_0 < 1$ )的校正剩余位相方差时,(8)式是一个较为普遍的表达式。

### 参 考 文 献

- [1] R. K. Tyson, Adaptive optics system performance approximations for atmospheric turbulence. *Opt. Engng*, 1990, 29(10): 1165~1173
- [2] Jiang Wenhan(姜文汉), Li Huagui(李华贵), Hartmann-shack wavefront sensing and wavefront control algorithm. *Proc. SPIE*, 1990, 1271: 82~93
- [3] C. Higgs, D. G. Fouche, C. F. Pearson, Scaled atmospheric blooming experiment. *Proc. SPIE*, 1992, 1628: 210~222
- [4] S. 潘契夫, 随机函数与湍流. 谈镛生等译, 科学出版社, 1976
- [5] 吴毅, 王英俭, 哈特曼波前探测及波前复原的仿真与误差分析. *光学学报*, 1994, 15(4): 473~479

## Analysis of the Residual Wavefront Variance Influenced by the Nonlinear Response of Deformable Mirror in Wavefront Correction

Wu Yi      Wang Yingjian      Gong Zhiben

(Anhui Institute of Optic and Fine Mechanics, Academia Sinica, Hefei 230031)

(Received 25 June 1994; revised 22 August 1994)

**Abstract** A simplified model and numerical simulation method are used to analyse the residual wavefront variance due to the nonlinear response of deformable mirror in wavefront correction by COAT. The additional term in residual variance of wavefront corrected is described as  $k(d/r_0)^b$ , in which  $k$  and  $b$  depend on system parameters.

**Key words** deformable mirror, nonlinear response, wavefront correction.