

# 运用余弦变换的三维物体面形轮廓术

赵 宏 陈文艺 谭玉山

(西安交通大学机械工程学院激光红外应用研究所, 西安 710049)

**摘 要** 首次提出通过对投影到物体表面的变形光栅图进行余弦变换以获得物体表面高度分布的方法, 实验证实此方法比传统的傅里叶变换法有更高精度和更快处理速度, 且易实现全场的自动处理。

**关键词** 三维面形测量, 余弦变换。

## 1 引 言

对三维物体表面形状测量的研究一直受到人们的重视。为了获得物体表面的三维信息, 把一个光栅图投影到物体表面上是最简单而且有效的方法。当光栅图被投影到物体表面上时, 光栅图根据物体的表面形状将产生变形, 然后把包含有物体三维信息的变形光栅图或二维条纹图记录下来, 从这二维条纹图中获取三维信息。

已有几种方法可直接分析变形光栅图<sup>[1~3]</sup>, 其中 Halioua 等人首次提出了相移三维轮廓术。此技术是利用三步相移法解调变形光栅图的相位分布, 这一技术要求投影光栅为正弦光栅, 并且需要用四幅光栅图进行相位计算。

本文所提供的技术也是基于直接分析变形光栅图。这种技术是通过用离散余弦变换法(DCT)来解调变形光栅的相位值, 在数字信号处理中已得到广泛的运用, Chen 等人提出了一种该技术的快速算法<sup>[4]</sup>, 这一算法仅仅对数据进行实变换, 因而比快速傅里叶变换速度快。同时另一种可对任意多个数据进行离散余弦变换法的快速算法也已由 Wagh 和 Ganesh 提出<sup>[5]</sup>。本文利用离散余弦变换法对变形光栅图进行频域变换, 并在频域中进行滤波处理, 可以消除高频项以及背景噪声, 从而得到精确的相位值。

## 2 相位解调原理

设投影光栅是一矩形光栅, 由一准直平行光照射, 当投影到被测物件表面上时, 将得到变形光栅图, 可用傅里叶级数表示为

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, y) \cos \left[ \frac{2\pi n}{p} x + n\Phi(x, y) \right]. \quad (1)$$

式中相位  $\Phi(x, y)$  包含所需要物体表面的三维信息。 $p$  是光栅图的周期。

从(1)式可以看出,条纹图的频谱分布除了基频  $f_0 = 1/p$  外,还有高频  $f_n = nf_0$ 。为了对高频滤波,把(1)式进行余弦变换,得到其频谱为:

$$G(u, v) = L + M + H. \tag{2}$$

式中  $G(u, v)$  是  $g(x, y)$  的二维频谱。 $L$  是背景项的频谱,  $M$  是基频项,  $H$  是高频项。由于这些频谱是相互分离的,如图 1 所示,因此,可以通过滤波处理仅保留基频项  $M$ , 然后对其进行反余弦变换得到

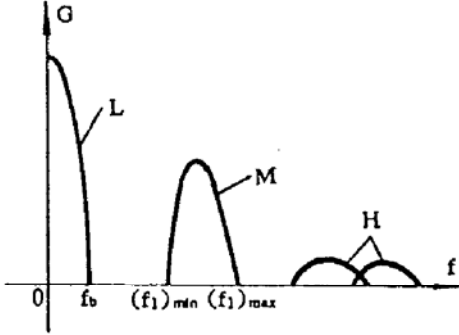


Fig. 1 Spatial spectra of a fringe pattern

$$g_1(x, y) = a_1(x, y) \cos \left[ \frac{2\pi}{p} x + \Phi(x, y) \right]. \tag{3}$$

让投影在物体表面上的光栅沿着  $X$  轴方向移动  $p/4$ , 则可得到另一条纹图

$$g'(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x, y) \cos \left[ \frac{2\pi n}{p} \left( x + \frac{p}{4} \right) + n\Phi(x, y) \right]. \tag{4}$$

同样对(4)式也进行余弦变换、滤波、反余弦变换,可得到

$$\begin{aligned} g_2(x, y) &= a_1(x, y) \cos \left[ \frac{2\pi}{p} \left( x + \frac{p}{4} \right) + \Phi(x, y) \right] \\ &= -a_1(x, y) \sin \left[ \frac{2\pi}{p} x + \Phi(x, y) \right]. \end{aligned} \tag{5}$$

因此,可以从(3)式和(5)式求出相位  $\Phi(x, y)$ ,

$$\Phi(x, y) = \tan^{-1} [g_1(x, y)/g_2(x, y)] - 2\pi x/p. \tag{6}$$

### 3 高度和相位的关系

投影和记录系统的几何结构示于图 2。 $P$  点和  $I$  点到参考面的距离相同,均为  $s$ ,二者分别是投影和成像的光孔中心,并且二者间的距离为  $d$ 。 $X$  轴方向如图所示,与光栅栅线垂直。 $Y$  轴与图所在的平面垂直且在参考平面上。 $Z$  轴坐标是物体表面与参考平面之间的距离,由  $h$  表示。 $G$  是一空间频率为  $f_0$  的矩形光栅,而光栅线的方向垂直于图表面方向。 $D_c$  是一个 CCD 摄像机,其扫描方向沿  $X$  轴方向。

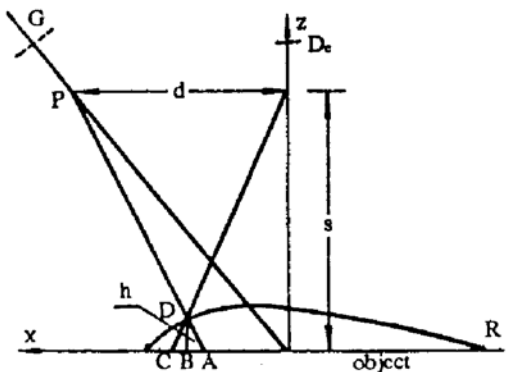


Fig. 2 Optical geometry of the projection and recording system

通过摄像机  $D_c$  可以测得参考平面上  $C$  点的相位  $\Phi_c$ , 由于物体上  $D$  点与参考平面上  $A$  点有相同相位,即  $\Phi_D = \Phi_A$ 。所以有:

$$AC = \Phi_{CD}/2\pi f_0. \tag{7}$$

其中  $\Phi_{CD}$  是物体上  $D$  点相对于参考平面上  $C$  点相位差值,其值可以由(6)式求出,  $f_0 = 1/p$ 。由于  $\Delta PID$  与  $\Delta ADC$  相似,则物体上  $D$  点相对于参考平面的高度值为:

$$h(x, y) = \frac{s AC}{d(1 + AC/d)} \approx \frac{s AC}{d}. \quad (d \gg AC) \tag{8}$$

其中  $d$ 、 $s$  为由图 2 所示的距离。把 (7) 式代入 (8) 式得：

$$h(x, y) = s \Phi_{CD} / 2\pi f_0 d \quad (9)$$

式中的  $\Phi_{CD}$  就是 (6) 式得到的  $\Phi(x, y)$ 。

#### 4 测量的最大范围

由于这种测量方法是在频域范围通过滤波处理得到基频项的，这就要求载波频率  $f_0$  与其它频谱是相互分离的。这个条件就限制了其测量的最大范围。下面分析这个限制条件。首先设第  $n$  级频谱所对应的频率为  $f_n$ ，则：

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} [2\pi n f_0 x + n\Phi(x, y)] = n f_0 + \frac{n}{2\pi} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \quad (10)$$

为了使基频与其它频谱相互分开，必须满足：

$$(f_1)_{\max} < (f_n)_{\min}, \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (11)$$

$$f_0 < (f_1)_{\min} \quad (12)$$

其中  $f_0$ 、 $(f_n)_{\max}$  和  $(f_n)_{\min}$  如图 1 所示。把 (10) 式代入 (11) 式和 (12) 式，有：

$$f_0 + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{\max} < n f_0 + \frac{n}{2\pi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{\min} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (13)$$

$$f_0 < f_0 + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{\min} \quad (14)$$

设  $|\partial \Phi / \partial x|_{\max}$  为  $|[\partial \Phi / \partial x]_{\max}|$  和  $|[\partial \Phi / \partial x]_{\min}|$  的最大值，则从 (13) 式和 (14) 式可以得到：

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{\max} < \frac{n-1}{n+1} 2\pi f_0, \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (15)$$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{\max} < 2\pi(f_0 - f_n) \quad (16)$$

由于在大多数情况下  $f_n \ll f_0/2$ ，同时  $(n-1)/(n+1)$  是单调递增的，所以由以上二式可得：

$$|\partial \Phi / \partial x|_{\max} < 2\pi f_0 / 3 \quad (17)$$

把 (9) 式代入 (17) 式，最后可得到

$$|\partial h(x, y) / \partial x|_{\max} < s/3d \quad (18)$$

(18) 式表明本方法对被测物体的形状有一定的限制。即被测物体表面的高度方向的坐标沿  $X$  轴方向的一阶导数必须小于  $s/3d$ 。

#### 5 实验结果与精度分析

实验装置如图 3 所示，测量对象为一叶螺旋推进器的叶片，实验中取  $p = 2 \text{ mm}$ ， $s = 400 \text{ mm}$ ， $d = 225 \text{ mm}$ 。变形光场由 CCD 摄像机摄入，摄像机与投影仪之间的夹角为  $30^\circ$ ，CCD 摄像机输出信号经 PCVISION/PIUS 图像卡转换为数字图像，每帧图像的采样时间为  $0.04 \text{ s}$ 。

图 4 为参考平面光栅投影图，图 5 为叶片的

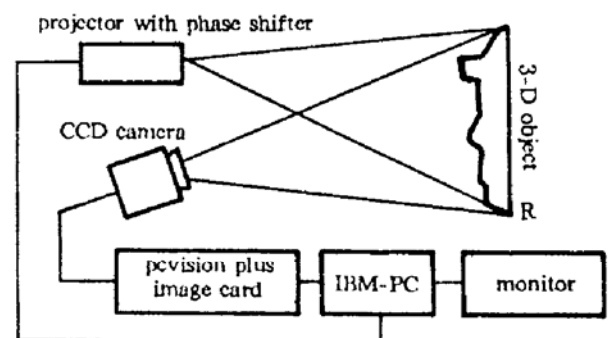


Fig. 3 Schematic diagram of the experimental setup

变形光栅投影图。通过变换、滤波、及相位计算，可以得到叶片相对参考平面的原理相位值，如图 6 所示。最后应用 Macy<sup>[6]</sup> 的方法得到图 6 的去包裹相位图，并用三维图显示于图 7。

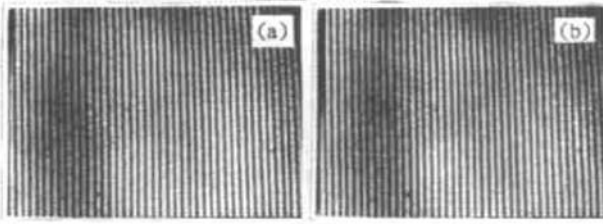


Fig. 4 (a) First grating pattern on reference surface, (b) second grating pattern on reference surface

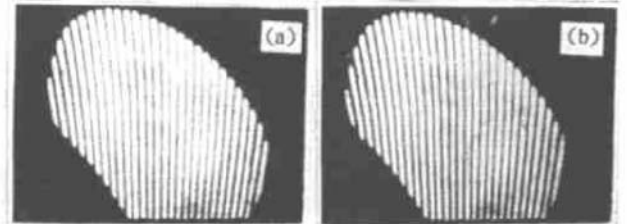


Fig. 5 (a) First deformed grating pattern on the object's surface, (b) second deformed grating pattern on the object's surface



Fig. 6 Wrapped phase pattern

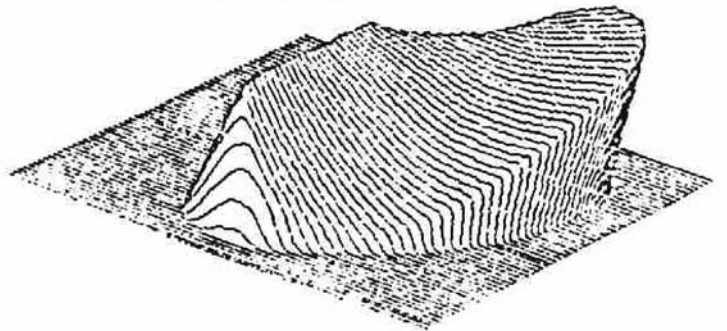


Fig. 7 Unwrapped phase distribution

为了考查采用离散余弦变换法的处理速度，可通过与最常用的二基离散傅里叶变换法 (DFT-Discrete Fourier Transform) 进行比较。当对  $N$  个实数进行一维的频域变换时，由于离散傅里叶变换法要求复数运算，因此其乘法的运算次数为  $2N \log_2 N$ ，而离散余弦变换法是一种实数域变换，运算量比离散傅里叶变换法少，其乘法的运算次数为  $N/2 \log_2 N$ ，可见离散余弦变换法算法比离散傅里叶变换法算法快近 4 倍。同时由于图像卡有两帧  $512 \times 512 \times 8$  bit 的存储空间，所有的计算、数据传递、以及存储等都是在内存与帧存之间进行，因而整个测量过程很快。在本文的测量系统中处理一个三维物体大约需 10 分钟。

从 (9) 式可知每级条纹 (即  $0 \sim 2\pi$ ) 所对应的高度为  $s/fd$ ，因此系统的测量精度与  $s$ 、 $f$ 、以及  $d$  的值有关，但是这些参数选择受 (18) 式的条件限制。另外，测量精度与 CCD 摄像机的分辨率有关。在通常情况下，被测物体表面高度沿  $X$  轴方向的变化梯度小于 1，这就要求  $s/d > 3$ ，如果  $f = 0.5$ ，则系统的测量灵敏度至少可达到 0.06 mm。如果需要更高的精度时，还可以选用频率更高的光栅。但是光栅频率也不能太大，因为这时光栅栅线的刻制精度和光栅相位标定精度都会大大地影响系统的测量精度。在本文的测量系统中，其测量灵敏度为 0.04 mm。

**结 论** 本文所提出的三维测量方法，具有装置简单、速度快、易于实现自动化测量等优点。由于涉及到频域，使被测物体的表面形状受到限制。这一限制影响测量精度，但是在通常的实际应用中，测量精度是可以满足的。

## 参 考 文 献

- [1] S. H. Tang, Y. Y. Hung, Fast profilometer for the automatic measurement of 3-D object shapes. *Appl. Opt.*, 1990, 29(20): 3012~3018
- [2] Y. Ichioka, M. Inuiya, Direct phase system. *Appl. Opt.*, 1972, 11(10): 1507~1514
- [3] M. Halioua, H. C. Liu, Optical three-dimensional sensing by phase measuring profilometry. *Opt. & Laser in Engng.*, 1989, 11(3): 185~215
- [4] W. Chen, C. H. Smith, S. C. Fralick, A fast computational algorithm for the discrete cosine transform. *IEEE Trans. Commum.*, 1977, COM-25(5): 1004~1009
- [5] M. D. Wagh, H. Ganesh, A new algorithm for the discrete cosine transform of arbitrary number of points. *IEEE Trans. Computers*, 1980, C-29(4): 269~277
- [6] W. W. Macy, Two-dimensional fringe-pattern analysis. *Appl. Opt.*, 1983, 22(23): 3898~3901

### Automated Profilometry of 3-D Diffuse Objects by Using Cosine Transformation

Zhao Hong      Chen Wenyi      Tan Yushan

(*Institute of Mechanical Engineering, Xi'an jiaotong University, Xian 710049*)

(Received 11 April 1994; revised 8 June 1994)

**Abstract** A new method of automatically reconstructing the 3-D surface of an object from the deformed grating pattern is proposed. The method can automatically and accurately obtain phase value at every pixel point without assigning fringe orders by using a discrete cosine transform algorithm. It is free from the errors caused by the higher harmonic components and the variation of light level. Theoretical analysis and experimental verification are presented.

**Key words** three-dimensional profile measurement, cosine transform.