第 15 卷 第 7 期
1995 年 7 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 15, No. 7
July, 1995

八元数神经网络模型：256 色图像的识别*

帅建伟 陈振湘 刘瑞堂 吴伯僖
（厦门大学物理系，厦门 361005）

摘 要 首次把八元数(Cayley 代数)引入到神经网络中，提出了八元数离散神经网络模型，并用信噪比理论初步考察了模型的稳定性和存贮容量。八元数神经网络模型可应用于高精度的 256 级的灰度图像或 256 值的彩色图像的识别中。

关键词 神经网络， 八元数， 图像识别。

1 引 言

自 1982 年 Hopfield 提出了二值 Hopfield 神经网络模型[1]后，再一次掀起了神经网络的研究热潮，形成了一个世界性的跨学科的研究热点[2]。Taketa 等把 Q 值像点用几个二值神经元来表示[3]，这样所有的二值神经元直接构成一个二值 Hopfield 神经网络模型。但这样也增加了神经元的数目，从而增加了网络的空间连线密度，对于高精度的识别该不足尤为突出。Zhang 等在此基础上提出了一个减少连接的方案[4]：表示同一灰度像点的几个神经元相互独立，无突触连接，由像点神经元群组成一个大神经元，与表示其它的像点大神经元具有突触连接。该模型的连接总数为像点数的平方，且具有较大的冗余度，但它导致了对突触连接权重的计算的复杂性：需由存贮图像的能量极小定义式去求解一模糊矩阵，再构造出连接矩阵。Francis 等提出的灰度级离散联想模型[5]，把 Q 值像点用 Q 个二值神经元来表示，但每个神经元分属于 Q 个独立的二值 Hopfield 神经网络模型。

Sirat 等提出了离散态复相角神经网络模型[6]，用复平面单位元上的离散点表示 Q 值像点。该模型的连接权重矩阵计算复杂，其联想记忆计算也复杂，且与现在成熟的布尔器件设计方式不同。文献[7, 8]提出了 Q 态神经网络模型，每个神经元可取 Q 个整数值，但如文献[9]所指出的，由于 Q 态模型的低存贮容量和低联想能力，是很难实用的。若引入高维信号输入空间，把输入输出空间扩展到高维，也即把高维数[10]引入到神经元中，使网络对噪声的敏感性与二值 Hopfield 模型相当，从而避开 Q 态模型所面临的困难。这样既可使网络具有与 Hopfield 模型相同的存贮容量，又可对多态图像进行识别。文献[11]把四元数(Hamilton 代数)[10]引入神经网络中，建立了四元数神经网络模型，可应用于 16 色彩色或 16 级灰度图像识别中。本文进一步在神经网络中引入八元数，该模型可应用于高精度的 256 色彩色或 256

---

* 国家自然科学基金重点项目资助课题。

收稿日期：1994 年 3 月 21 日；收到修改稿日期：1994 年 6 月 6 日

级灰度图像的识别中，而其彩色编码与现在成熟的计算机 256 色图像的 8 位 0，1 彩色编码方式一一对应。

2 多元数简介

令四元数系 $Q(R)=\{\alpha:\alpha=a+bi+cj+dk,\ a,b,c,d\in R\}$，其中 i，j，k 表示三个虚基矢，用自然的方式定义它的元素的加法，以及元素与实数的乘法，它的元素间的乘法规定为用分配法去展开下式：

$$(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)(b_0+b_1i+b_2j+b_3k) \tag{1}$$

而其中：

$$i^2=j^2=k^2=-1,\qquad ij=-ji=k,\qquad jk=-kj=i,\qquad ki=-ik=j. \tag{2}$$

由上可知，四元数中三个虚基矢元间的乘法是不可交换的。四元数虽不满足乘法交换律，但满足结合律：$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$。对任一四元数 $\alpha=a+bi+cj+dk$，定义其四元共轭 $\alpha^*=a-bi-cj-dk$。故 $\alpha\alpha^*=a^2+b^2+c^2+d^2=|\alpha|^2$，其中 $|\alpha|$ 表示为 α 的模。

对八元数系，可以视为是把复数的域从 R 推广到四元数而成，即：

$$\begin{aligned}C(R)&=\{\alpha+\beta e;\ \alpha,\beta\in Q(R)\}\\&=\{a_0+a_1i+a_2j+a_3k+a_4e+a_5ie+a_6je+a_7ke;\ a_i\in R\}\end{aligned} \tag{3}$$

式中 e 是新引进的超复数基元，因此八元数系 C 是四元复数系，也可以把它视为将四元数的域从 R 推广到 C 而成。用自然的方式定义它的元素的加法，以及元素与实数的乘法，它的元素间的乘法规定为用分配法去展开 $(\alpha+\beta e)(\gamma+\zeta e)$，而其中超复数基元的乘法如表 1 所列：

Table 1.

	1	i	j	k	e	ie	je	ke
1	1	i	j	k	e	ie	je	ke
i	i	-1	k	$-j$	ie	$-e$	$-ke$	je
j	j	$-k$	-1	i	je	ke	$-e$	$-ie$
k	k	j	$-i$	-1	ke	$-je$	ie	$-e$
e	e	$-ie$	$-je$	$-ke$	-1	i	j	k
ie	ie	e	$-ke$	je	$-i$	-1	$-k$	j
je	je	ke	e	$-ie$	$-j$	k	-1	$-i$
ke	ke	$-je$	ie	e	$-k$	$-j$	i	-1

容易看出由上表定义的乘法，既不是可换的，也不是结合的。例如有：

$$ie\ je=-k,\qquad je\ ie=k,\qquad (ie\ je)i=-j,\qquad ie(je\ i)=j$$

超复数基元与四元数有关系：$\alpha e=e\alpha^*$ (4)

对任一八元数：$\Pi=\alpha+\beta e=a_0+a_1i+a_2j+a_3k+a_4e+a_5ie+a_6je+a_7ke$，定义其共轭：$\Pi^*=\alpha^*-\beta e=a_0-a_1i-a_2j-a_3k-a_4e-a_5ie-a_6je-a_7ke$。故：

$$\Pi\Pi^*=(\alpha+\beta e)(\alpha^*-\beta e)=\alpha\alpha^*-\alpha\beta e+\beta e\alpha^*-\beta e\beta e=\alpha\alpha^*+\beta\beta^*=|\Pi|^2 \tag{5}$$

3 八元数神经网络模型

设八元数神经网络模型有 N 个神经元，每个神经元的状态为

$$\pm1\pm i\pm j\pm k\pm e\pm ie\pm je\pm ke$$

设存储 M 个记忆模式 $S^\mu(\mu=1,2,\cdots M)$，存储的样本由推广的 Hebb 学习规则构成连接矩阵，即：

$$J_{mn}=\sum_{\mu=1}^{M} S_m^\mu (S_n^\mu)^*,\qquad J_{mm}=A. \tag{6}$$

$(S_n^\mu)^*$ 表示取 S_n^μ 的八元数共轭，对角元 A 为实数 0。则网络的八元数动力学方程为

$$S_m(t+1)=\Theta\{\sum_{n=1}^{N} J_{mn}S_n(t)\} \tag{7}$$

函数 $\Theta\{x\}$ 的取值规则如下：当 x 的实部或任意虚部不小于 0 时，$\Theta\{x\}$ 的对应部分取为正单位元，当 x 的实部或任意虚部小于 0 时，$\Theta\{x\}$ 的对应部分取为负单位元，如：

$$\Theta\{3+i+3j-5k-e+2je\}=1+i+j-k-e+ie+je+ke$$

下面来分析当存储 M 个随机样本，且 $M<<N$ 时，存储样本为动力学系统的稳定吸引子，即：$S^\nu=\Theta\{JS^\nu\}$。

设任一模式 $S=a_1+a_2i+a_3j+a_4k+a_5e+a_6ie+a_7je+a_8ke$，其中 $a_i=\pm 1$。先把八元数连接矩阵化为实部和各虚部，对角元素有 $J_{mm}=0$，非对角元素$(m\neq n)$有：

$$\begin{aligned}J_{mn}&=\sum_\mu S_m^\mu (S_n^\mu)^*\\&=A_{1\,mn}+A_{2\,mn}i+A_{3\,mn}j+A_{4\,mn}k+A_{5\,mn}e+A_{6\,mn}ie+A_{7\,mn}je+A_{8\,mn}ke\end{aligned} \tag{8}$$

且有：

$$\begin{aligned}A_{1\,mn}&=\sum(a_{1\,m}^\mu a_{1\,n}^\mu+a_{2\,m}^\mu a_{2\,n}^\mu+a_{3\,m}^\mu a_{3\,n}^\mu+a_{4\,m}^\mu a_{4\,n}^\mu+a_{5\,m}^\mu a_{5\,n}^\mu+a_{6\,m}^\mu a_{6\,n}^\mu+a_{7\,m}^\mu a_{7\,n}^\mu+a_{8\,m}^\mu a_{8\,n}^\mu)\\A_{2\,mn}&=\sum(-a_{1\,m}^\mu a_{2\,n}^\mu+a_{2\,m}^\mu a_{1\,n}^\mu-a_{3\,m}^\mu a_{4\,n}^\mu+a_{4\,m}^\mu a_{3\,n}^\mu-a_{5\,m}^\mu a_{6\,n}^\mu+a_{6\,m}^\mu a_{5\,n}^\mu-a_{8\,m}^\mu a_{7\,n}^\mu+a_{7\,m}^\mu a_{8\,n}^\mu)\end{aligned} \tag{9}$$

式中求和表示从 1 到 M 对 μ 求和，项 $A_{3\,mn}$，…，$A_{8\,mn}$ 同样计算可得，这里略去。把上式代入迭代动力学方程(7)，可得分解为实部和各虚部的动力学迭代方程：

$$\begin{aligned}a_{1\,m}(t+1)=\Theta\sum\,[&A_{1\,mn}a_{1\,n}(t)-A_{2\,mn}a_{2\,n}(t)-A_{3\,mn}a_{3\,n}(t)-A_{4\,mn}a_{4\,n}(t)\\&-A_{5\,mn}a_{5\,n}(t)-A_{6\,nm}a_{6\,n}(t)-A_{7\,mn}a_{7\,n}(t)-A_{8\,mn}a_{8\,n}(t)]\\a_{2\,m}(t+1)=\Theta\sum\,[&A_{1\,mn}a_{2\,n}(t)+A_{2\,mn}a_{1\,n}(t)+A_{3\,mn}a_{4\,n}(t)-A_{4\,mn}a_{3\,n}(t)\\&+A_{5\,mn}a_{6\,n}(t)-A_{6\,nm}a_{5\,n}(t)+A_{8\,mn}a_{7\,n}(t)-A_{7\,mn}a_{8\,n}(t)]\end{aligned} \tag{10}$$

式中求和表示对 n 从 1 到 N，且 $n\neq m$。项 $a_{3\,m}(t+1)$，…，$a_{8\,m}(t+1)$ 这里略去。

当输入图像为某一存储样本 S^ν，即 $S(0)=S^\nu$ 时，(10)式中实部动力学迭代方程右边括号内的表达式可写为：

$$\begin{aligned}&A_{1\,mn}a_{1\,n}^\nu-A_{2\,mn}a_{2\,n}^\nu-A_{3\,mn}a_{3\,n}^\nu-A_{4\,mn}a_{4\,n}^\nu-A_{5\,mn}a_{5\,n}^\nu-A_{6\,nm}a_{6\,n}^\nu-A_{7\,mn}a_{7\,n}^\nu-A_{8\,mn}a_{8\,n}^\nu)\\&=8(N-1)a_m^\nu+\Delta_1\end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta_1=\sum\,[&a_{2\,m}^\mu\sum(a_{2\,n}^\mu a_{1\,n}^\nu-a_{1\,n}^\mu a_{2\,n}^\nu+a_{3\,n}^\mu a_{4\,n}^\nu-a_{4\,n}^\mu a_{3\,n}^\nu+a_{5\,n}^\mu a_{6\,n}^\nu-a_{6\,n}^\mu a_{5\,n}^\nu+a_{8\,n}^\mu a_{7\,n}^\nu+a_{7\,n}^\mu a_{8\,n}^\nu)\\&+a_{3\,m}^\mu\sum(a_{3\,n}^\mu a_{1\,n}^\nu-a_{1\,n}^\mu a_{3\,n}^\nu+a_{4\,n}^\mu a_{2\,n}^\nu-a_{2\,n}^\mu a_{4\,n}^\nu+a_{5\,n}^\mu a_{7\,n}^\nu-a_{7\,n}^\mu a_{5\,n}^\nu+a_{6\,n}^\mu a_{8\,n}^\nu-a_{8\,n}^\mu a_{6\,n}^\nu)\\&+a_{4\,m}^\mu\sum(a_{4\,n}^\mu a_{1\,n}^\nu-a_{1\,n}^\mu a_{4\,n}^\nu+a_{2\,n}^\mu a_{3\,n}^\nu-a_{3\,n}^\mu a_{2\,n}^\nu+a_{5\,n}^\mu a_{8\,n}^\nu-a_{8\,n}^\mu a_{5\,n}^\nu+a_{7\,n}^\mu a_{6\,n}^\nu-a_{6\,n}^\mu a_{7\,n}^\nu)\\&+a_{5\,m}^\mu\sum(a_{5\,n}^\mu a_{1\,n}^\nu-a_{1\,n}^\mu a_{5\,n}^\nu+a_{6\,n}^\mu a_{2\,n}^\nu-a_{2\,n}^\mu a_{6\,n}^\nu+a_{7\,n}^\mu a_{3\,n}^\nu-a_{3\,n}^\mu a_{7\,n}^\nu+a_{8\,n}^\mu a_{4\,n}^\nu-a_{4\,n}^\mu a_{8\,n}^\nu)\\&+a_{6\,m}^\mu\sum(a_{6\,n}^\mu a_{1\,n}^\nu-a_{1\,n}^\mu a_{6\,n}^\nu+a_{4\,n}^\mu a_{7\,n}^\nu-a_{7\,n}^\mu a_{4\,n}^\nu+a_{2\,n}^\mu a_{5\,n}^\nu-a_{5\,n}^\mu a_{2\,n}^\nu+a_{8\,n}^\mu a_{3\,n}^\nu-a_{3\,n}^\mu a_{8\,n}^\nu)\\&+a_{7\,m}^\mu\sum(a_{7\,n}^\mu a_{1\,n}^\nu-a_{1\,n}^\mu a_{7\,n}^\nu+a_{2\,n}^\mu a_{8\,n}^\nu-a_{8\,n}^\mu a_{2\,n}^\nu+a_{3\,n}^\mu a_{5\,n}^\nu-a_{5\,n}^\mu a_{3\,n}^\nu+a_{6\,n}^\mu a_{4\,n}^\nu-a_{4\,n}^\mu a_{6\,n}^\nu)\\&+a_{8\,m}^\mu\sum(a_{8\,n}^\mu a_{1\,n}^\nu-a_{1\,n}^\mu a_{8\,n}^\nu+a_{7\,n}^\mu a_{2\,n}^\nu-a_{2\,n}^\mu a_{7\,n}^\nu+a_{4\,n}^\mu a_{5\,n}^\nu-a_{5\,n}^\mu a_{4\,n}^\nu+a_{3\,n}^\mu a_{6\,n}^\nu-a^\mu yy_{6\,n}a_{3\,n}^\nu)]\end{aligned} \tag{12}$$

式中的中括号内求和表示对 n 从 1 到 N，且 $n\neq m$。中括号外求和表示对 μ 从 1 到 M 求和，且

$\mu\neq\nu$。对于各虚部的迭代计算同理可得，这里略去不写。

上面实际求得的是信号-噪声展开式，(11)式中右边第一项为信号项，第二项为噪声项。由于随机存储模式具有伪正交性，所以(12)式噪声项 Δ_1 右边小括中为对具有随机分布的 ± 1 求和，而这些和值大小表示动力学系统向 $S^{\mu}_{m}(\mu\neq\nu)$ 迭代的可能性大小，即向 S_m 迭代的权重。易知该权重的平均值为 0，均方差为 $\sqrt{8(N-1)}$，则得 Δ_1 的平均值为 0，其均方差为 $\sqrt{64(N-1)(M-1)}$，即 $8\sqrt{(N-1)(M-1)}$。当 $N\gg M$ 时这些噪声权重值远小于信号项的权重值 $8(N-1)$，为一可忽略的小量，所以网络向具有 $8(N-1)$ 权重的 S^{ν}_{m} 收敛，于是有 $S^{\nu}=\Theta\{JS^{\nu}\}$。而当输入一个与存储样本 $S\nu$ 相差不大的图像时，上述关系仍近似成立，故经一次或数次迭代，网络自动地收敛于存储样本 S^{ν}。即存储样本为动力学系统的稳定吸引子。

八元数网络的信噪比为 $SNR=\sqrt{(N-1)/(M-1)}$，等于 Hopfield 模型的信噪比。当 N，M 远大于 1 时，$SNR\approx\sqrt{1/\alpha}$，这里 $\alpha=M/N$ 为存贮容量。因为信噪比的大小决定了网络的存贮容量和联想能力，所以八元数神经网络模型的存贮容量和联想能力与 Hopfield 模型相当。文献[12]应用信噪比理论和平均场理论等研究了 Hopfield 模型的存贮容量，下面应用信噪比理论具体计算八元数模型的存贮容量 α。

由于存贮模式的独立随机性，得噪声项 Δ 具有正态分布。不失一般性，令 $S^{\nu}_{m}Re=1$。要 $S^{1'\,Re}_{m}$ 也为 1，也即要求信号项与噪声项的和不小于零，其几率 p 为：

$$P=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{1/\alpha}}^{\infty}dx\,\exp\left(-x^{2}/2\right)\tag{13}$$

所以 S^{ν} 为稳定吸引子的几率为：

$$\rho=P^{8N}=\exp\left[-8N\,f_0(\alpha)\right]\tag{14}$$

其中：

$$f_0(\alpha)=-\ln\left\{\left[1+erf(1/2\alpha)^{1/2}\right]/2\right\}\tag{15}$$

这里

$$erf(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{y}\exp\left(-x^{2}\right)dx\tag{16}$$

当 α 很小时，函数 $f_0(\alpha)$ 可展开为：

$$f_0(\alpha)\approx(\alpha/2\pi)^{1/2}\exp\left(-1/2\alpha\right)\tag{17}$$

则对有限的几率 ρ，可求得存贮容量为：$\sqrt{1/\alpha}\sim 2\ln 8N$，当 $N\gg 1$ 时，$\ln 8N\approx\ln N$，则有：

$$\alpha\sim\frac{1}{2\ln N}\tag{18}$$

该结论与 Hopfield 模型的存贮容量 $1/2\ln N$ 相同[12,13]。

4 256 色图像识别

在彩色显示屏中，一般必须有三个光源产生三基色：红，绿，兰，即电视显示基色。改变三基色光的亮度大小，从而改变它们之间的比例关系，以便使它们相加混色，得出所要的色彩。在计算机图像学中，由于使用的是 0，1 数据文件方式，对连续色彩的再现采用的是色度分立级别的近似表示，如在计算机的 EGA/VGA 等 16 色图形显示卡中由三基色构成十六种

色彩来近似表示一幅彩色图像。所用的级别越多，对自然图像的近似越准确，越逼真，所以在计算机中常见的还有 IBM 8514 图形显示方式，其色彩为 256 色，构成方式为：每一像素由 8 bit 的二进制数码表示，其中各有 2 bit 表示每一基色的 4 级亮度，余下 2 bit 表示 4 级色饱和度，这样构成了 256 色图形显示方式。在本文的八元数神经网络模型中，每个神经元也为八位二值形式，与计算机的 256 色表示方式很相似，故可应用于 256 色彩色图像的的识别中，其编码方式可与计算机中的 8 位 256 色编码方式相同。

文献[3～5]所建议的模型，由于都未采用二进制编码方式，虽然具有较大的冗余度，但对于高精度的 256 级灰度图像的编码较长，所以并不适用。文献[7～9]模型当 $Q=256$ 时其存贮和联想能力很低。且各模型都不能对彩色图像编码。在八元数神经网络的彩色图像识别应用中，对八元数神经元的彩色编码与现在成熟的计算机 256 色图像的 8 位二进制彩色编码有着数学上的一一对应关系，所以其编码短。且由于是对 Q 值图像的二进制编码，故本模型适用彩色和灰度图像的识别。但应看出，八元数的运算关系与像素的变换关系并不存在物理上的对应的关系。

从神经器件的电路实现上来考虑，一个关键问题是如何实现神经元间结合强度的权值变化，也即突触连接处理单元的设计，这是一个技术实现问题；另一个问题则从根本上决定了神经网络能否真正大规模实用化：随神经元数目的增加，高密度的空间连接限制问题。本模型由于用一个高维数表示一个像点的状态，每个神经元的连接总数为 $N-1$，与 Hopfield 模型相比，并未增加网络的空间连线密度，而是把复杂性转移到神经元处理单元和突触连接处理单元的技术实现上：要求各单元能处理八元数的基本运算。如果由八个连续脉冲信号来表示八元数，也即要求处理单元具有对脉冲信号进行存贮，八元数运算和输出等处理功能。

结　论　本文首次提出了八元数离散神经网络模型，并从理论上初步考察了模型的稳定性和存贮容量。作者认为八元数神经网络模型，可应用于 256 色彩色图像的高精度识别中。

神经网络模型从数的推广上，由实数，复数，四元数到八元数。四元数离散神经网络模型能识别 $2^4=16$ 种色彩，对八元数神经网络模型则可识别 $2^8=256$ 种色彩。同理可建立 16 元数神经网络模型以用于更高精度的图像识别中。

参 考 文 献

[1] J. J. Hopfield, Neural networks and physical systems with emergent collective computertational abilities. *Proc. Natl Acad. Sci. U. S. A.*, 1982, **79**(4)：2554～2558

[2] David Rumelhart, *Proc. IJCNN*, International Joint Conference On Neural Networks, Seattle, WA, 1991：Ⅰ 1～Ⅰ 832

[3] M. Taketa, J. W. Goodman, Neural networks for computation: number representations and programming complexity. *Appl. Opt.*, 1986, **25**(17)：3033～3046

[4] W. Zhang, K. Ltoh, J. Tanida *et al.*, Hopfield model with multistate neurons and its optoelectronic implementation. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(2)：195～200

[5] T. S. Y. Francis, C. M. Uang, S. Yin, Gray-level discrete associative memory. *Appl. Opt.*, 1993, **32**(8)：1322～1329

[6] G. Y. Sirat, A. D. Maruani, Y. Ichioka, Gray level neural networks. *Appl. Opt.*, 1989, **28**(3)：414～415

[7] H. Rieger, Storing an extensive number of grey-toned patterns in a neural network using multistate neurons. *J. Phys.* (*A*), 1990, **23**(23)：L1273～L1279

[8] D. Bolle, P. Dupont, J. V. Mourik, On the phase diagram of the Q-state Potts-glass neural network. *Acta Physica A*, 1992, **185**(1/4) : 357～362

[9] T. Stiefvater, K. R. Muller, A finite-size scaling investigation for Q-state Hopfield models: storage capacity and basins of attraction. *J. Phys.* (*A*), 1992, **25**(22) : 5919～5929

[10] E. U. Condon, *et al.*, *Handbook of Physics*. New York: Second Edition, 1967, 1～22

[11] J. W. Shuai, Z. X. Cheng, R. T. Liu *et al.*, The Hamilton Neural Network Model: to Recognize Color Patterns. *The second International Conference on Opto-Electronics Science and Engineering*, Beijing, 1994, Ⅱ : 26～28

[12] A. D. Bruce, E. J. Gardner, D. J. Wallace, Dynamics and statistical mechanics of the Hopfield model. *J. Phys.* (*A*), 1987, **20**(10) : 2909～2934

[13] R. J. Mceliece, E. C. Posner, E. R. Rodemich *et al.*, The capacity of the Hopfield associative memory. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1987, IT-**33**(4) : 461～482

The Cayley Neural Network Model: To Recognize 256-Level Color Patterns

Shuai Jianwei Chen Zhenxiang Liu Ruitang Wu Boxi
(*Department of Physics, Xiamen University, Xiamen* 361005)
(Received 21 March 1994; revised 6 June 1994)

Abstract A discrete Cayley number neural network model is presented for the first time, whereby a neuron is a 256-state ($\pm 1 \pm \mathrm{i} \pm \mathrm{j} \pm \mathrm{k} \pm \mathrm{e} \pm \mathrm{ie} \pm \mathrm{je} \pm \mathrm{ke}$). Signal-to-noise theory is used to analyse the stability and the storage capacity. The storage capacity of the Cayley model is the same as that of the Hopfield model. This 256-state neural network can be applied to recognize the 256-level color or 256-level grey patterns.

Key words neural network, the Cayley number, pattern recognition.