

任意折射率分布光纤的一种有效的近似分析方法

李 洪 李 英 黄肇明

(上海科技大学无线电电子学系, 上海 201800)

摘 要 本文讨论了一种任意折射率分布光纤的有效的数值分析方法。光纤折射率分布被多层结构所模拟, 矢量波动方程用矩阵来代替, 传播常数用 4×4 矩阵的迭代相乘来计算。若光纤的折射率变化是缓慢的, 可以进一步简化成 2×2 矩阵的简单运算。

关键词 光纤, 介质波导。

1 引 言

对于折射率变化光纤, 射线^[1]及标量^[2]分析法是不够准确的, 必须解矢量波动方程以得到准确解。本文介绍的方法是折射率分布的多层结构近似, 每一层皆假定有相同的折射率。此方法比一般的解矢量波动方程的方法^[3,4]要快得多; 与文献[5,6]中介绍的矩阵方法比较, 它的适用范围更广, 其关键是其中包含了各层中(包括最内层)场分布的检测与判断。

2 场分量的组合

如图 1 所示, 将轴对称的光纤折射率分布进行分层处理, 每层均看作是均匀折射率分布的, 且折射率取为^[6]: $n_i = [n(a_{i+1}) + n(a_i)]/2$ 。在每一层中, 矢量波动方程简化为矢量 Helmholtz 方程:

$$\nabla_t^2 \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} + (n^2 k_0^2 - \beta^2) \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

在圆柱坐标系下, 只有 E_z 、 H_z 满足

$$\nabla_t^2 \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} + (n^2 k_0^2 - \beta^2) \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

而 E_r 、 E_θ 分量方程相互耦合不能分开。为简化方程, 场分量 E 总可以写成:

$$\begin{aligned} E(r, \theta, z, t) &= \tilde{E}(r) \exp(j\omega t + jm\theta - j\beta z) \\ &= (\tilde{E}_r(r) \mathbf{r} + \tilde{E}_\theta(r) \boldsymbol{\theta} + \tilde{E}_z(r) \mathbf{z}) \exp(j\omega t + jm\theta - j\beta z), \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (3)$$

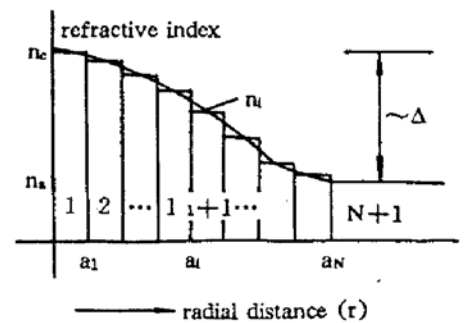


Fig. 1 Refractive index distribution and the multilayer approximation of the optical fiber. core radius is $r = a_N$ and i is the layer number. Δ is the refractive index difference

并假设:

$$E^-(r) = \tilde{E}_r(r) - j\tilde{E}_\theta(r), \quad E^+(r) = \tilde{E}_r(r) + j\tilde{E}_\theta(r) \quad (4)$$

则矢量 Helmholtz 方程可以简化成贝塞耳函数方程:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m+1)^2}{r^2} - \beta^2 + n^2 k_0^2 \right] E^+(r) = 0 \quad (5)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m-1)^2}{r^2} - \beta^2 + n^2 k_0^2 \right] E^-(r) = 0 \quad (6)$$

同理, 假设:

$$\Phi_z^- = j\tilde{E}_z - z\tilde{H}_z, \quad \Phi_z^+ = j\tilde{E}_z + z\tilde{H}_z, \quad (z = \omega\mu/\beta) \quad (7)$$

由麦氏方程可以推出:

$$\beta\Phi_z^\pm = \left(\frac{d}{dr} \pm \frac{m \pm 1}{r} \right) E^\pm \quad (8)$$

由(8)式可见, E^- 与 Φ_z^- 、 E^+ 与 Φ_z^+ 分别成对。前者对应 HE 型模场, 其旋转方向与波的行进方向一致; 后者对应 EH 型模场。

3 用“4×4”矩阵分析导波模式

3.1 径向变换矩阵和边界矩阵

如图 1 所示, 在第 $(i+1)$ 层中, 比较传播常数 β 和波数 $k_0 n_i$ 的大小, 可以写出柱坐标系下的电磁场表达式。并可由此推出柱面 $r = a_{i+1}$ 与柱面 $r = a_i$ 上的场分量的关系式^[6], 即

$$\begin{bmatrix} \Phi_z^- \\ E^- \\ \Phi_z^+ \\ E^+ \end{bmatrix}_{r=a_{i+1}} = P_i(a_{i+1}, a_i) \begin{bmatrix} \Phi_z^- \\ E^- \\ \Phi_z^+ \\ E^+ \end{bmatrix}_{r=a_i} \quad (9)$$

式中, $P_i(a_{i+1}, a_i)$ 称为变换矩阵(见文献[5]附录二), 即

$$P_i(a_{i+1}, a_i) = \begin{bmatrix} P^-(a_{i+1}, a_i) & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & P^+(a_{i+1}, a_i) \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中, $P^\pm(a_{i+1}, a_i)$ 是 2 阶矩阵。在阶梯边界上, 所有的 E_z 、 H_z 、 E_θ 和 $D_r = n^2 E_r$ 都是连续的, 并且根据 $E^\pm(r) = \tilde{E}_r(r) \pm j\tilde{E}_\theta(r)$ 及 $\Phi_z^\pm = j\tilde{E}_z \pm z\tilde{H}_z$, 可以写出:

$$\begin{bmatrix} \Phi_z^- \\ E^- \\ \Phi_z^+ \\ E^+ \end{bmatrix}_{r=a_i[\text{第}(i+1)\text{层}]} = T_i \begin{bmatrix} \Phi_z^- \\ E^- \\ \Phi_z^+ \\ E^+ \end{bmatrix}_{r=a_i[\text{第}(i)\text{层}]} \quad (11)$$

$$\text{式中 } T_i \text{ 称为边界矩阵, 且 } T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \Delta_i^e & 0 & \Delta_i^e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \Delta_i^e & 0 & 1 + \Delta_i^e \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中 $\Delta_i^e = (n_{i-1}^2/n_i^2)/2$, 表示边界两侧折射率的变化。

3.2 特征方程

利用上述的两种矩阵, 第 1 层 $r = a_1$ 处的场与第 $(n+1)$ 层 $r = a_N$ 处的场挂上了联系, 即

$$\begin{bmatrix} \Phi_z^- \\ E^- \\ \Phi_z^+ \\ E^+ \end{bmatrix}_{r=a_N[\text{第}(N+1)\text{层}]} = [F_{ij}] \begin{bmatrix} \Phi_z^- \\ E^- \\ \Phi_z^+ \\ E^+ \end{bmatrix}_{r=a_1[\text{第1层}]} \quad (13)$$

$$\text{式中,} \quad [F_{ij}] = T_N \cdot P_{N-1} \cdot T_{N-1} \cdots P_2 \cdot T_2 \cdot P_1 T_1 \quad (14)$$

为写出最内层的场, 引入自然边界条件, 即 $r = 0$ 处的场必须有限。

$$\text{因此,} \quad \begin{bmatrix} \Phi_z^- \\ E^- \\ \Phi_z^+ \\ E^+ \end{bmatrix}_{r=a_1[\text{第1层}]} = [G_{ij}] \begin{bmatrix} A_1^{m-1} \\ 0 \\ A_1^{m+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中 $[G_{ij}]$ 矩阵元素为:

$$1) k_0 n_c > \beta \text{ 时, } U_0 = \sqrt{k_0^2 n_c^2 - \beta^2}$$

$$g_{11} = U_0 J_m(U_0 a_1) / \beta, \quad g_{21} = J_{m-1}(U_0 a_1), \quad g_{33} = U_0 J_m(U_0 a_1) / \beta, \quad g_{43} = J_{m+1}(U_0 a_1), \quad (16)$$

其余为“0”。

$$2) k_0 n_c < \beta \text{ 时, } W_0 = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_c^2}$$

$$g_{11} = W_0 I_m(W_0 a_1) / \beta, \quad g_{21} = I_{m-1}(W_0 a_1), \quad g_{33} = W_0 I_m(W_0 a_1) / \beta, \quad g_{43} = I_{m+1}(W_0 a_1), \quad (17)$$

其余为“0”。并且, 为计算方便, 不妨设 $A_1^{m-1} = 1$ 。在 $r = \infty$ 时, 场也必须有限, 因而要求:

$$\begin{bmatrix} \Phi_z^- \\ E^- \\ \Phi_z^+ \\ E^+ \end{bmatrix}_{r=a_N[\text{第}(N+1)\text{层}]} = [E_{ij}] \begin{bmatrix} A_e^{m-1} \\ 0 \\ A_e^{m+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中, $[E_{ij}]$ 矩阵元素为:

$$e_{11} = -W_e K_m(W_e a_N) / \beta, \quad e_{21} = K_{m-1}(W_e a_N), \quad e_{33} = -W_e K_m(W_e a_N) / \beta, \quad e_{43} = K_{m+1}(W_e a_N), \quad (19)$$

其中, $W_e = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_{a_N}^2}$, 从而由(13)式得:

$$[E_{ij}] \begin{bmatrix} A_e^{m-1} \\ 0 \\ A_e^{m+1} \\ 0 \end{bmatrix} = [F_{ij}] \cdot [G_{ij}] \begin{bmatrix} A_1^{m-1} \\ 0 \\ A_1^{m+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

令 $[H_{ij}] = [F_{ij}] \cdot [G_{ij}]$, 可由(20)式推得:

$$A_1^{m+1} = \frac{e_{11} \cdot h_{21} - e_{21} \cdot h_{11}}{e_{21} \cdot h_{13} - e_{11} \cdot h_{23}} \quad (21)$$

和特征方程:

$$(e_{11} \cdot h_{21} - e_{21} \cdot h_{11})(e_{43} \cdot h_{33} - e_{33} \cdot h_{43}) - (e_{33} \cdot h_{41} - e_{41} \cdot h_{31})(e_{21} \cdot h_{13} - e_{11} \cdot h_{23}) = 0 \quad (22)$$

由(21)式,若 $m > 0$, 则 $|A_m^{m+1}| < 1$ 时, 对应的传导模为 HE 模式; $|A_m^{m+1}| > 1$ 时, 对应的传导模为 EH 模式; 若, $m = 0$, 且 $k_0 n_c > \beta$, 则 $A_0^{0+1} = -1$ 时, 对应的传导模为 TM_{0m} 模式; $A_0^{0+1} = +1$ 时, 对应的传导模为 TE_{0m} 模式; $m = 0$, 且 $k_0 n_c < \beta$ 时的情形则与上述相反。

4 传播常数的近似计算

处理特征方程(22)式是很繁杂的数值运算, 适当的近似可以方便地求出传播常数。若所计算的光纤的折射率变化是缓慢的(一般皆可以满足), (12)式中的 Δ_i^2 项将很小, 以至边界矩阵 T_i 可以近似用对角矩阵来表示。

上述近似的合理性是: T_i 长阵的非对角线上元素对矩阵 $[F_{ij}]$ 的元素 f_{ij} 的贡献是用 Δ_i^2 的幂来表示的; 而其对角线上的元素对 f_{ij} 的贡献则是以 $(1 + \Delta_i^2)$ 的幂表示。所以作为一级近似, 在处理中可以把 T_i 当作对角矩阵来处理。在上述的近似下, 上一节的矩阵都可以分裂成两组, 分别计算, 它们分别对应于 HE(对应“-”号)和 EH(对应“+”号)模式。从而“ 4×4 ”矩阵退化为“ 2×2 ”矩阵的运算, 大大简化。只是当 $m = 0$ 时, 所算出的 TE_{0m} 、 TM_{0m} 模式是简并的。这时特征方程(2)式或简单表示为:

$$e_{\text{HE}} \cdot h_{\text{EH}} - e_{\text{EH}} \cdot h_{\text{HE}} = 0 \tag{23}$$

5 功率归一化

各模式场的幅度必须归一化以使沿 z 轴的波印亭功率为单位值。其功率为:

$$P = (1/2) \text{Re} \iint (E \times H^*)_z r dr d\theta \tag{24}$$

由于第一层的场都用贝塞耳函数表示, 其系数项又可以通过叠代关系来获取, 因而(24)式积分的解释表达式是可以得到的, 即功率 P 可以求出是 A_m^{m+1} 的函数。在弱导条件下, 根据文献[7], 上式有近似表示式:

$$P^\pm = C \cdot \int_0^\infty |E^\pm|^2 r dr \tag{25}$$

式中, “+”号对应 EH 模式; “-”号对应 HE 模式, C 为比例系数。当 $m = 0$ 时, $P^+ = P^-$, 对应 TE_{0m} 和 TM_{0m} 模式。

6 数值分析

6.1 收敛性实验

假定光纤的折射率分布为:

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2(1 - 2\Delta(r/a)^2) & 0 \leq r \leq a \\ n_2^2(1 - 2\Delta) = n_2^2 & a \leq r \end{cases} \tag{26}$$

并且正化频率 $v = 3$ 。对(26)式的折射率分布进行分层处理, 假定均分 N 层。利用本理论模型计算 HE_{11} 模的正化传播常数 (β/k_0) , 结果如图 2 所示。收敛极快。

6.2 阶梯折射率分布光纤的分析

假定光纤为阶梯折射率分布, 芯子折射率为 n_1 , 包层折射率为 n_2 , 则其正化传播常数 (β/k_0) 与正化频率 v 的关系如图 3 所示, 与标量解文献[8]

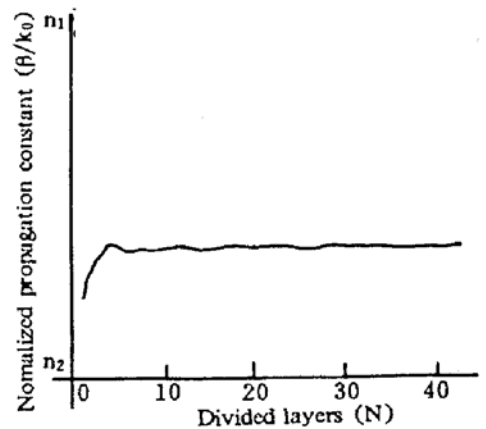


Fig. 2 Convergence experiment
HE₁₁ mode normalized propagation constant versus divided layers (N) in quadratic-index fiber with normalized frequency $v = 3$

符合得很好。

6.3 平方律折射率分布光纤的分析

假定光纤为(26)式表示的平方律折射率分布, 则其正化传播常数 (β/k_0) 与正化频率 v 的关系如图 4 所示。在远离截止时, 本模型的计算值与标量解^[8]十分吻合; 在截止附近时, 标量解呈现偏差。

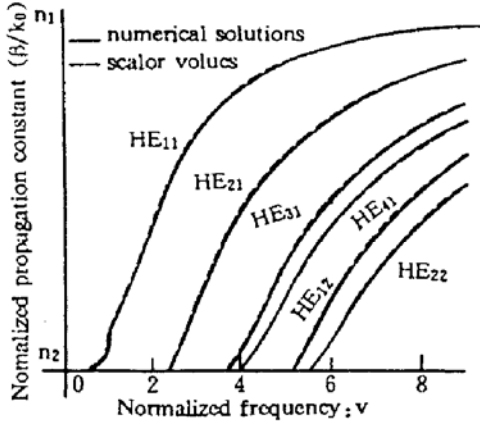


Fig. 3 Normalized propagation constant versus normalized frequency (v) in the fiber with step-index distribution

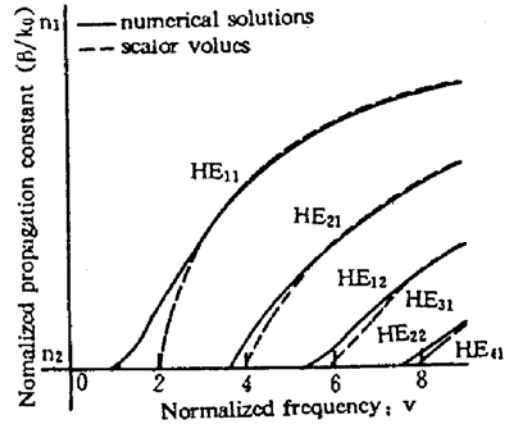


Fig. 4 Normalized propagation constant versus normalized frequency (v) in the fiber with quadratic-index distribution

6.4 光纤中的场分布

假定光纤芯半径 $a = 3 \mu\text{m}$, $Na = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0.19$, 皮长为 $0.805 \mu\text{m}$ 。当光纤为阶梯折射率分布时, 其可能存在的各模场的场分布如图 5 所示; 当光纤为平方律折射率分布时, 其可能存在的各模场的场分布如图 6 所示。比较图 5 和图 6, 在同等条件下, 平方律折射率分布光纤可以更好地抑制高次模, 并使模场能量更加靠近光纤轴芯。

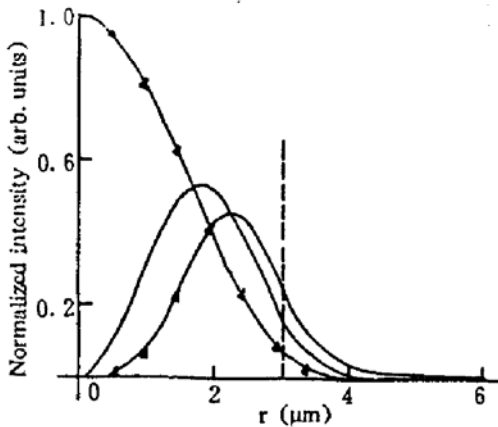


Fig. 5 Modefield intensities shown as a function of radial distance from the fiber centre. The dashed line shown the core-cladding boundary at $a = 3 \mu\text{m}$, and $NA = 0.19$

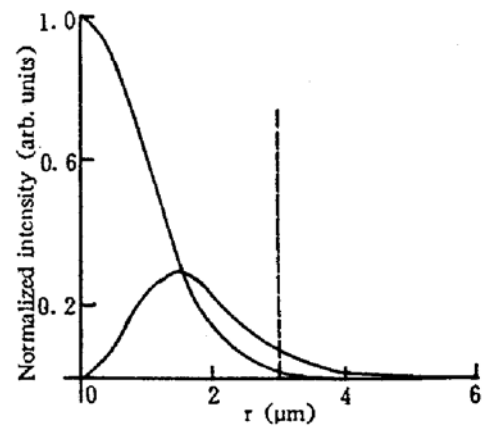


Fig. 6 Modefield intensities shown as a function of radial distance from the fiber centre. The dashed line shown the core-cladding boundary at $a = 3 \mu\text{m}$, and $NA = 0.19$

结束语 本文介绍了一种简便的分析渐变折射率光纤的数值方法。此法原理上是简单易行的, 把解矢量波动方程退变为简单的矩阵运算。

参 考 文 献

- [1] S. E. Miller, Light propagation in generalized lens-like media. *B. S. T. J.*, 1965, 44(9): 2017~2064
- [2] J. Sakai, T. Kimura, Bending loss of propagation modes in arbitrary-index profile optical fibers. *Appl. Opt.*, 1978, 17(10): 1499~1506
- [3] P. J. B. Clarricoats, K. B. Chen, Electromagnetic wave propagation along radially inhomogeneous dielectric cylinders. *Electron. Lett.*, 1970, 6(7): 694~695
- [4] C. Yeh, G. Lindren, Computing the propagation characteristics of radially stratified fibers-an efficient method. *Appl. Opt.*, 1977, 16(3): 483~493
- [5] T. Tanaka, S. Suematsu, An exact analysis of cylindrical fiber with index-distribution by matrix-method and its application to focusing fiber. *Trans. IECE Japan*, 1976, E59(11): 1~8
- [6] Per L. Danielsen, Analytical expressions for group delay in the far field from an optical fiber having an arbitrary index profile. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1981, QE-17(6): 850~853
- [7] B. Kapany, *Optical Waveguides*. New York: Academic, 1972, pp. 108
- [8] 叶培夫, 吴彝尊编著, 光波导技术基本理论. 人民邮电出版社, 1981, 180, 318

An Efficient Approximate Analytical Method of Optical Fiber Having an Arbitrary Index Profile

Li Hong Li Ying Huang Zhaoming

(Department of Radio-Electronic, Shanghai University of Science & Technology, Shanghai 201800)

(Received 1994; revised 1994)

Abstract An efficient numerical method for the optical fiber with an arbitrary index distribution is given in this paper. The index profile of fiber is simulated by a multi-layer structure, and the vectorial wave equation is replaced with the matrices. The propagation constant is calculated by using iterative multiplication of four by four matrices. The further reduced computation of two by two matrices may be obtained for the fiber with small index difference.

Key words optical fiber, medium waveguide.