

算符 a^k 本征态热迭加光场 的光子数统计分布*

詹佑邦

(淮阴师范专科学校, 淮阴 223001)

摘 要 利用密度矩阵方法, 导出了光子湮没算符高次幂 $a^k (k \geq 2)$ 本征态热迭加光场光子数统计分布的一般表达式, 讨论了热噪声对非经典光场态光子数统计分布振荡行为的影响。

关键词 算符 a^k 的本征态, 热噪声, 光子数统计分布。

1 引 言

众所周知, 构成一纯迭加态的光场态之间的量子干涉可导致产生一些非经典效应。Wodkiewicz 等人^[1]研究了由真空态与单个或两个光子数态构成的迭加态光场的二阶压缩效应; 夏云杰等人^[2]研究了由真空态与光子数态构成的迭加态场的高阶压缩; 李福利等人^[3]研究了光子湮没算符高次幂 a^k 的正交归一本征态的压缩和振幅平方压缩, 这些本征态可由 k 个振幅相位不同的相干态迭加而成; 人们还研究了迭加态光场的亚泊松光子统计^[4]和光子数统计分布振荡^[5]等非经典效应。

由于在实际过程中不可避免地存在着热噪声, 因此研究伴随着热噪声的非经典光场的量子统计性质就具有重要的实际意义。Mollow 和 Glauber 等人^[6-8]曾研究了相干态场的热噪声迭加。最近, Kim 等人^[9]研究了压缩数态与压缩热态的量子统计特性, Vourdas 等人^[10, 11]研究了迭加有热噪声的压缩态光场的光子数统计分布, 得到了许多有意义的结果。

本文研究光子湮没算符高次幂 $a^k (k \geq 2)$ 本征态光子数统计分布的热噪声效应, 讨论了热噪声对偶、奇相干态光场光子数统计分布的影响。

2 相干密度矩阵

相干态通常记为

$$|z\rangle = U_{(z)}|0\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (1)$$

$$U_{(z)} = \exp(za^+ - z^*a),$$

式中 $U_{(z)}$ 是 Weyl 位移算符, $|z|^2$ 是平均相干光子数, a^+ 和 a 分别是光子产生和湮没算符, 且

* 江苏省教委自然科学基金和青年科学基金资助的课题。

收稿日期: 1994年1月28日; 收到修改稿日期: 1994年7月22日

$$[a, a^+] = 1, \quad a|z\rangle = z|z\rangle. \quad (2)$$

在以下的讨论中将以 $|\alpha\rangle, |z\rangle, |c\rangle$ 表示相干态, 以 $|N\rangle, |M\rangle$ 表示光子数态。

考虑一个处于热平衡的量子系统, 其密度矩阵可表为(取 $\hbar = \omega = 1$)

$$\rho_{th} = Z^{-1} \exp(-\beta a^+ a), \quad (3)$$

$$\beta = (k_B T)^{-1}, \quad Z = \text{Tr} \exp(-\beta a^+ a),$$

式中 k_B 为玻尔兹曼常数, T 为绝对温度。容易证明

$$\left. \begin{aligned} \langle M | \rho_{th} | N \rangle &= \delta_{NM} P_N, & \rho_{th} &= \sum_N P_N |N\rangle \langle N|, \\ P_N &= \exp(-\beta N) [1 - \exp(-\beta)] = \frac{\langle N \rangle^N}{(1 + \langle N \rangle)^{N+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 $\langle N \rangle$ 表征平均光子数。文献[6~8]研究了相干态与热光场的迭加问题。根据这些文献, 迭加场的密度矩阵可表为

$$\left. \begin{aligned} \rho(\alpha, T) &= \int \frac{d^2 z}{\pi} P(z, T) U_{(z)} \rho_0 U_{(z)}^+, \\ P(z, T) &= \frac{1}{\langle N_T \rangle} \exp\left[-\frac{|z|^2}{\langle N_T \rangle}\right], & \rho_0 &= |\alpha\rangle \langle \alpha|, & \langle N_T \rangle &= (\exp \beta - 1)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 $\langle N_T \rangle$ 为平均热光子数。根据 Glauber-Lashes 公式^[6~8], 可得到密度矩阵 $\langle N | \rho(\alpha, T) | M \rangle$ 的表式

$$\left. \begin{aligned} \langle N | \rho(\alpha, T) | M \rangle &= \psi(\alpha, \langle N_T \rangle; N, M) L_N^{M-N}(-\nu), \\ \psi(\alpha, \langle N_T \rangle; N, M) &= \exp\left[-|\alpha|^2 / (1 + \langle N_T \rangle)\right] (N! / M!)^{1/2} \\ &\quad \left[\langle N_T \rangle^N / (1 + \langle N_T \rangle)^{M+1} \right] (\alpha^*)^{M-N} \\ \nu &= |\alpha|^2 / \langle N_T \rangle (1 + \langle N_T \rangle). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 $L_N^{M-N}(-\nu)$ 为 Laguerre 多项式, 若取 $N = M$, (6) 式即给出相干态热迭加场的光子数统计分布。文献[6~8]的方法很容易推广到其它光场态, 诸如压缩数态^[9]和压缩相干态^[10, 11]。若某一待研究的量子态 $|\psi\rangle$ 伴有热噪声迭加, 则其密度矩阵可由下式表示^[9~11]

$$\left. \begin{aligned} \rho_{st} &= \int \frac{d^2 z}{\pi} P(z, T) U_{(z)} \rho_s U_{(z)}^+, \\ \rho_s &= |\psi\rangle \langle \psi|, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 $P(z, T)$ 由 (5) 式给出。由 (6) 式与 (7) 式即可得到该热迭加场的光子数统计分布 $\langle N | \rho_{st} | N \rangle$ 。

3 热迭加光场的光子数统计分布

光子湮没算符高次幂 $a^k (k \geq 2)$ 的正交归一本征态可表示为^[12~14]

$$\left. \begin{aligned} |\psi_m^{(k)}\rangle &= A_m^{-1/2} (|\alpha|^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{kn+m}}{\sqrt{(kn+m)!}} |kn+m\rangle, \\ A_m (|\alpha|^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(kn+m)}}{(kn+m)!} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中 $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta)$, m 的可能取值为 $m = 0, 1, 2, \dots, k-1$, 系数 $A_m (|\alpha|^2)$ 为一级数。由 (8) 式可得到算符 a^k 本征态 $|\psi_m^{(k)}\rangle$ 的光子数统计分布

$$P(N) = |\langle N | \psi_m^{(k)} \rangle|^2 = A_m^{-1} (|\alpha|^2)^N / N!, \quad (N = kn + m, m = 0, 1, 2, \dots, k-1) \quad (9)$$

式中 $|\alpha|^2$ 为平均光子数。容易验证, 若取 $k = 2$ 时, (8) 式即为偶相干态 $|\alpha\rangle_e (m = 0)$ 和奇相干态 $|\alpha\rangle_o (m = 1)$ 的表式

$$\left. \begin{aligned} |\alpha\rangle_e &= (\text{ch } |\alpha|^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle, \\ |\alpha\rangle_o &= (\text{sh } |\alpha|^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

图 1 给出了偶相干态和奇相干态的光子数统计分布曲线, 可以看到这两个非经典光场态^[15]的光子数统计分布皆呈现出强烈的振荡。

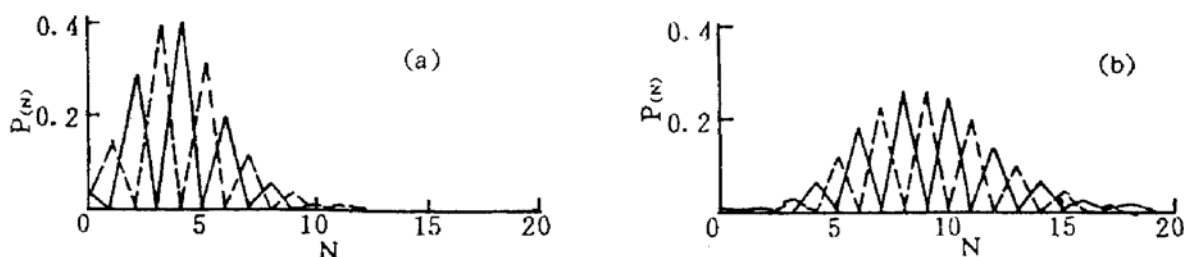


Fig. 1 The photon-number statistical distribution $P(N)$ of the even coherent state (solid line) and the odd coherent state (dotted line), (a) $|\alpha|^2 = 4$, (b) $|\alpha|^2 = 9$

已经证明^[3], 算符 $a^k (k \geq 2)$ 的本征态亦可表示为 k 个相位不同的相干态 $|\alpha \exp(i \frac{2\pi}{k} l)\rangle (l = 0, 1, 2, \dots, k-1)$ 的线性迭加

$$\left. \begin{aligned} |\psi_m^{(k)}\rangle &= F_m^{-1/2} \sum_{l=0}^{k-1} \exp(i \frac{2\pi}{k} ml) |\alpha \exp(i \frac{2\pi}{k} l)\rangle, \\ F_m &= k \exp(-|\alpha|^2) \sum_{l=0}^{k-1} \exp[|\alpha|^2 \exp(i \frac{2\pi}{k} l)] \exp(i \frac{2\pi}{k} ml). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$(m = 0, 1, 2, \dots, k-1)$

引入一广义平移算符 $D(\alpha')$

$$D(\alpha') = \exp[\alpha' a^+ - (\alpha')^* a],$$

$$\alpha' = \alpha \exp[i2\pi l/k], \quad (l = 0, 1, 2, \dots, k-1) \quad (12)$$

于是(11)式态 $|\psi_m^{(k)}\rangle$ 可表为

$$|\psi_m^{(k)}\rangle = F_m^{-1/2} \sum_{l=0}^{k-1} \exp(i \frac{2\pi}{k} ml) D(\alpha') |0\rangle. \quad (13)$$

若以 $\rho(\psi_m^{(k)}, \langle N_T \rangle)$ 表示迭加有热噪声的态 $|\psi_m^{(k)}\rangle$ 的密度矩阵。考虑一相干态 $|C\rangle$, 由(13)式, 有

$$\left. \begin{aligned} \langle C | \rho(\psi_m^{(k)}, \langle N_T \rangle) | C \rangle &= (F_m^* F_m)^{-1/2} \sum_{l, l'=0}^{k-1} \exp[i \frac{2\pi}{k} m(l-l')] \langle C | D(\alpha') \rho_0(T) D^+(\alpha'') | C \rangle, \\ \rho_0(t) &= [1 - \exp(-\beta)] \exp(-\beta a^+ a), \\ \alpha' &= \alpha \exp(-2\pi l/k), \quad \alpha'' = \alpha \exp(i2\pi l'/k). \quad (l, l' = 0, 1, 2, \dots, k-1) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

计算(14)式中的期望值项, 可得

$$\left. \begin{aligned} & \langle C | D(\alpha') \rho_0(T) D^+(\alpha'') | C \rangle \\ & = [1 - \exp(-\beta)] \exp[-|C|^2 - |\alpha|^2 + \alpha'^* \alpha'' \exp(-\beta)] \\ & \quad + (C^* \alpha' + C \alpha''^*) [1 - \exp(i\mu - \beta)] + |C|^2 \exp(-\beta), \\ & \quad \mu = (2\pi/k)(l' - l). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

利用公式^[10]

$$\left. \begin{aligned} & \exp(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 r + \alpha_2 r) \\ & = \sum_{M, N} (M!)^{-1} (\alpha, r)^M (\alpha_2/r)^N L_N^{M-N}(-r^2), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中 $L_N^{M-N}(-r^2)$ 是 Laguerre 多项式, 将(15)式写为

$$\left. \begin{aligned} & \langle C | D(\alpha') \rho_0(T) D^+(\alpha'') | C \rangle \\ & = [1 - \exp(-\beta)] \exp[-|C|^2 - |\alpha|^2 + \alpha'^* \alpha'' \exp(-\beta)] \\ & \quad \left\{ \sum_{M, N} (M!)^{-1} C^M C^{*N} (\alpha''^*)^{M-N} \exp(-N\beta) [1 - \exp(-i\mu - \beta)]^{M-N} L_N^{M-N}(-\lambda), \right. \\ & \quad \left. \lambda = 4\alpha' (\alpha'')^* \exp(i\mu) \operatorname{sh}^2 \left[\frac{1}{2} (\beta - i\mu) \right]. \right\} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

另一方面, 利用展开式有

$$\left. \begin{aligned} & \langle C | \rho(\psi_m^{(k)}, \langle N_T \rangle) | C \rangle \\ & = \sum_{M, N} \langle C | N \rangle \langle N | \rho(\psi_m^{(k)}, \langle N_T \rangle) | M \rangle \langle M | C \rangle \\ & = \sum_{M, N} P(\langle N_T \rangle) \exp(-|C|^2) \frac{C^{*N} C^M}{(M! N!)^{1/2}}, \\ & \quad P(\langle N_T \rangle) = \langle N | \rho_m^{(k)}, \langle N_T \rangle | M \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将(17)式代入(14)式, 然后与(18)式相比较, 可得到

$$\left. \begin{aligned} P(\langle N_T \rangle) & = (F_m^* F_m)^{-1/2} [1 - \exp(-\beta)] \sum_{l, l'=0}^{k-1} \left\{ \exp \left[i \frac{2\pi}{k} m(l - l') \right] \right. \\ & \quad \exp[-|\alpha|^2 + (\alpha')^* \alpha'' \exp(-\beta)] (N!/M!)^{1/2} (\alpha''^*)^{M-N} \\ & \quad \left. \exp(-N\beta) [1 - \exp(i\mu - \beta)]^{M-N} L_N^{M-N}(-\lambda) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中 $\exp(-\beta) = \langle N_T \rangle / (\langle N_T \rangle + 1)$ 。若令 $N = M$, (19)式即给出迭加有热噪声的态 $|\psi_m^{(k)}\rangle$ 的光子数统计分布。

借助于数值计算, 具体考察 $k = 2$ 时态 $|\psi_m^{(2)}\rangle$ 热迭加光场的光子数统计分布。计算表明, 与纯偶相干态(或奇相干态)光子数统计分布(如图 1(a)[或图 1(b)]所示)明显不同的是, 当伴随有热噪声时, 偶相干态(或奇相干态)光场的光子数统计分布在 N 为奇数(或 N 为偶数)时亦不为零, 如图 2 所示。由图 2 可见, 若取平均相干光子数 $|\alpha|^2 = 4$, 当平均热光子数 $\langle N_T \rangle = 0.01$ [图 2(a)]和 $\langle N_T \rangle = 0.1$ [图 2(b)]时, 偶、奇相干态热迭加光场的光子数统计分布皆可呈现振荡; 但当平均热光子数增大至 $\langle N_T \rangle = 1$ 时, 光子数统计分布的振荡行为将消失[图 2(c)]。图 3 展示了平均相干光子数 $|\alpha|^2 = 9$ 时偶、奇相干态热迭加光场的光子数统计分布曲线。当 $\langle N_T \rangle = 0.01$ 时, 光子数统计分布呈现振荡[图 3(a)]; 但当平均热光子数增大至 $\langle N_T \rangle$

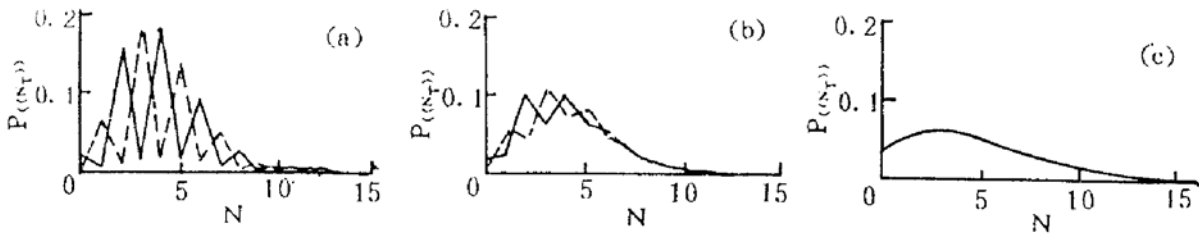


Fig. 2 The photon-number statistical distribution $P(\langle N_T \rangle)$ of the even coherent state (solid line) and the odd coherent state (dotted line) with thermal noise. The value of $|\alpha|^2 = 4$ and (a) $\langle N_T \rangle = 0.01$, (b) $\langle N_T \rangle = 0.1$, (c) $\langle N_T \rangle = 1$

$= 0.1$ 时，偶、奇相干态热迭加光场的光子数统计分布皆不再呈现振荡行为[图 3(b)]；至于当 $\langle N_T \rangle = 1$ 时，光子数统计分布的振荡行为早已不复存在[图 3(c)]。数值计算还表明，当平均热光子数较小时，如 $\langle N_T \rangle = 0.01$ ，偶相干态热迭加场的光子数统计分布曲线与奇相干态明显不同(见图 2(a)及图 3(a))；但当平均热光子数较大时，如 $\langle N_T \rangle = 1$ ，偶、奇相干态热迭加场的光子数统计分布曲线将趋于一致而完全叠合[图 2(c)和图 3(c)]。这说明，对于偶相干态和奇相干态，当平均热光子数较大时，它们的热迭加场光子数统计分布特性将完全相同而不再存在差异。

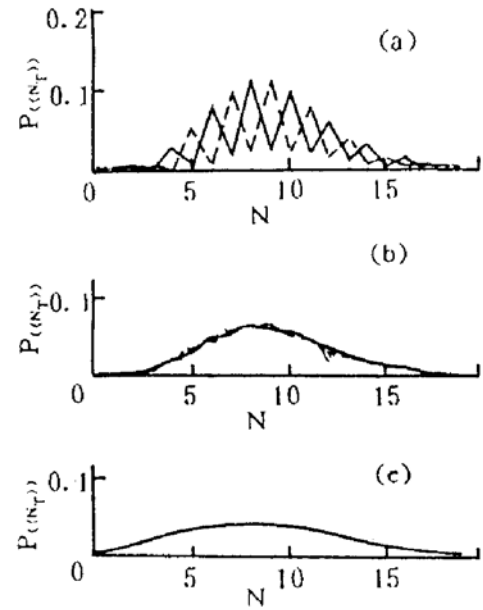


Fig. 3 Same as in Fig. 2, but the value of $|\alpha|^2 = 9$

结 论

利用密度矩阵方法，导出了光子湮没算符高次幂 $a^k (k \geq 2)$ 本征态的热噪声迭加场光子数统计分布的一般表达式，并对偶、奇相干态热迭加场的光子数统计分布作了数值计算与讨论。研究表明，随着平均热光子数的增大，迭加场的光子数统计分布的振荡行为将逐渐消失，这说明非零温度的热噪声迭加可导致非经典光场态向经典光场态转变，仅当平均热光子数远小于 1 时，光场态可呈现非经典特性。研究还表明，辐射场光子数统计分布的振荡行为与初始平均相干光子数有关，振荡更容易产生于平均相干光子数较小的系统。

参 考 文 献

- [1] K. Wodkiewicz, P. L. Knight, S. J. Buckle *et al.*, Squeezing and superposition states. *Phys. Rev. (A)*, 1987, **35** (6): 2567~2577
- [2] 夏云杰, 郭光灿, 光场高阶压缩的非经典性和独立性. *物理学报*, 1990, **39**(7): 1070~1074
- [3] 李福利, 柴晋临, 张智明, 构造光子数湮没算子高次幂的正交本征态的新方法. *物理学报*, 1991, **40**(7): 1058~1064
- [4] L. Mandel, The nonclassical nature of a superposition state has been illustrated using a P distribution. *Phys. Scr. (T)*, 1986, **12**(1): 34
- [5] W. Schleich, M. Pernigo, Fam Le Kien, Nonclassical state from two pseudoclassical states. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(3): 2172~2187
- [6] B. R. Mollow, R. J. Glauber, Quantum theory of parametric amplification (I). *Phys. Rev.*, 1967, **160**(5):

1076~1096

- [7] G. Lachs, Theoretical aspects of mixtures of thermal and coherent radiation. *Phys. Rev. (B)*, 1965, **138**(4B) : B1012~1016
- [8] B. Saleh, *Photoelectron Statistics*. Springer-Verlag, Berlin, 1978
- [9] M. S. Kim, F. A. M. de Oliveira, P. L. Knight, Properties of squeezed number states and squeezed thermal states. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **40**(5) : 2494~2503
- [10] A. Vourdas, Superposition of squeezed coherent states with thermal light. *Phys. Rev. (A)*, 1986, **34**(4) : 3466~3469
- [11] A. Vourdas, R. M. Weiner, Photon-counting distribution in squeezed states. *Phys. Rev. (A)*, 1987, **36**(12) : 5866~5869
- [12] 王继锁, 光子消灭算符高次幂本征态的数学结构及其性质. *物理学报*, 1991, **40**(4) : 547~554
- [13] 詹佑邦, 光子湮没算符高次幂本征态的压缩性质. *物理学报*, 1992, **41**(8) : 1279~1288
- [14] 时维春, 马爱群, 光子消灭算符 k 次幂本征态的量子统计性质. *光学学报*, 1992, **12**(10) : 902~906
- [15] Y. Xia, G. Guo, Nonclassical properties of even and odd coherent states. *Phys. Lett. (A)*, 1989, **136**(6) : 281~283
- [16] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*. John Wiley, New York, 1973

The Photon-Number Statistical Distribution of Superposition of Eigenstates of Operator a^k with Thermal Noise

Zhan Youbang

(Huaiyin Teachers College, Huaiyin 223001)

(Received 28 January 1994; revised 22 July 1994)

Abstract The general expression for the photon-number distribution of superposition of eigenstates of high order power of photon annihilation operator $a^k (k \geq 2)$ with thermal noise is derived by means of the density matrix method. The influence of the thermal noise on the oscillations in the photon-number distribution in the nonclassical light field is discussed.

Key words the eigenstates of operator a^k , thermal noise, the photon-number statistical distribution.