

# 克尔介质中光波的自衍射效率的理论计算

王康文

(中国科学院上海技术物理研究所, 上海 200083)

李 劬 陈险峰 陈英礼

(上海交通大学应用物理系, 上海 200030)

**摘 要** 采用前向四波耦合的理论模型研究了薄克尔介质的厚度、吸收、入射光强等因素对光波自衍射效率的影响, 详细分析了光波的位相变化、位相失配以及二波混频项的作用。

**关键词** 克尔介质, 自衍射。

## 1 引 言

光波的自衍射现象是两相干光场作用下的非线性介质(如光折变晶体、克尔介质等)产生三阶非线性极化响应的结果, 它在光通讯(如全光开关)、光计算等领域有着较好的应用前景。由于克尔介质具有响应速度快的特点, 故近年来, 我们对克尔介质产生了浓厚的兴趣。

Khoo、Sanchez 等对薄克尔介质中二波混频时信号光的放大现象进行研究的同时<sup>[1, 2]</sup>, 也涉及到自衍射现象, 但未作深入研究。一般情况下, 光波的自衍射效率比较低, 影响它的因素较多。虽然文献[3]在介质厚度为零的假设条件下, 利用傅里叶级数迭加的方法求出了一级自衍射效率, 但并未讨论光波的位相变化、位相失配以及二波混频项的作用, 另外, 介质中的光强是随介质的厚度而变化的<sup>[2]</sup>, 故此理论模型欠佳。本文采用前向简并四波混频的理论模型研究了克尔介质的厚度、吸收、入射光强等因素对光波自衍射效率的影响, 详细分析了位相失配、光波的位相变化以及二波混频项的作用。

## 2 理论模型

两相干入射光在薄克尔介质内交迭形成干涉条纹, 克尔效应导致了折射率光栅的产生, 从而导致了光波的自衍射效应。

设两相干入射光  $E_1$ 、 $E_2$  以夹角  $\theta$  入射到克尔介质中, 如图 1 所示, 偏振方向都垂直于入射平面,  $E_1$ 、 $E_2$  分别为  $E_0$  的零级和一级衍射光,  $E_3$ 、 $E_4$  分别为  $E_0$  的零级和一级衍射光, 介质中的总场强为:

$$E = \sum_{j=1}^4 E_j \exp(ik_j \cdot r) \quad (1)$$

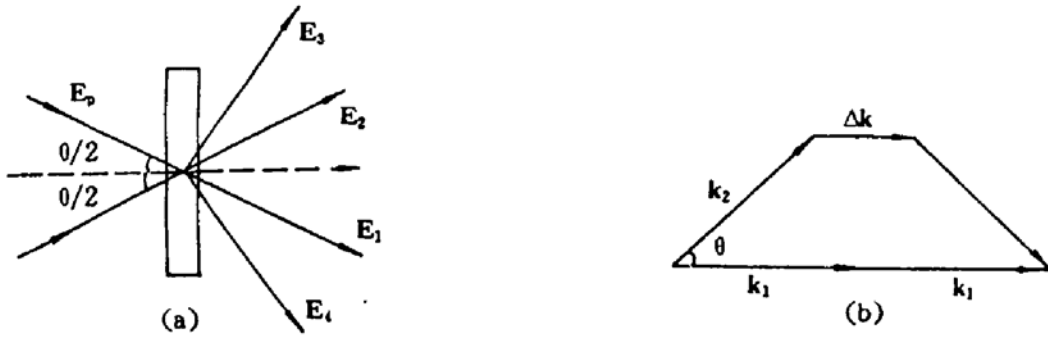


Fig. 1 (a) Schematic drawing of optical-wave-self-diffraction in Kerr medium,  
(b) Schematic drawing of phase mismatch

假设: 1) 光波为相干平面波; 2) 光波的振幅在  $z$  方向的一个波长范围内无显著变化, 即  $|\partial^2 E / \partial z^2| \ll |k \partial E / \partial z|$ ; 3)  $\theta$  角较小; 4)  $n_2$  是实数, 即入射光的干涉图样和折射率光栅间不存在相移; 5)  $|\Delta n| \ll n_0$ ; 6) 位相失配:  $\Delta k = (2k_2 - k_3 - k_1) \cdot z = (2k_1 - k_2 - k_4) \cdot z$ , 其中  $z$  是  $z$  方向的单位矢量; 7) 只有零级和一级衍射光出现。

克尔介质中, 克尔效应导致折射率变为<sup>[2]</sup>:

$$n = n_0 + \Delta n = n_0 + n_2 \langle E^2 \rangle = n_0 + n_2 \left| \sum_{j=1}^4 E_j \exp(i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}) \right|^2. \quad (2)$$

其中  $n_0$  为无光场作用时介质的折射率,  $n_2$  称为克尔系数。把(1)式和(2)式代入波动方程

$$\nabla^2 E + (n^2 \omega^2 / c^2) E = 0, \quad (3)$$

得下列耦合方程<sup>[2]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \partial E_1 / \partial z &= -E_1 \alpha / 2 + iq(|E_1|^2 + 2|E_2|^2 + 2|E_3|^2 + 2|E_4|^2)E_1 \\ &\quad + iq[E_2^2 E_3^* \exp(i\Delta kz) + 2E_2 E_4 E_1^* \exp(-i\Delta kz)], \\ \partial E_2 / \partial z &= -E_2 \alpha / 2 + iq(|E_2|^2 + 2|E_1|^2 + 2|E_3|^2 + 2|E_4|^2)E_2 \\ &\quad + iq[E_1^2 E_4^* \exp(i\Delta kz) + 2E_1 E_3 E_2^* \exp(-i\Delta kz)], \\ \partial E_3 / \partial z &= -E_3 \alpha / 2 + iq(|E_3|^2 + 2|E_1|^2 + 2|E_2|^2 + 2|E_4|^2)E_3 \\ &\quad + iqE_2^2 E_1^* \exp(i\Delta kz), \\ \partial E_4 / \partial z &= -E_4 \alpha / 2 + iq(|E_4|^2 + 2|E_1|^2 + 2|E_2|^2 + 2|E_3|^2)E_4 \\ &\quad + iqE_1^2 E_2^* \exp(i\Delta kz). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中  $\alpha$  为介质的吸收系数,  $q = n_2 \omega / c$  称为耦合常数, 边界条件为:

$$E_1|_{z=0} = E_{10}, \quad E_2|_{z=0} = E_{20}, \quad E_3|_{z=0} = E_4|_{z=0} = 0. \quad (5)$$

可以看出, (4)式右边第一项是介质的吸收项, 由于介质的吸收, 光波在介质中的强度将降低, 从而使得光波的耦合强度减弱; 第二项是二波耦合项 TWM, 它通过影响光波位相的变化来影响光波的耦合强度; 第三项是前向四波混频项 FFWM, 不同的混频项  $E_n E_m$  对应于栅矢为  $\mathbf{k}_{nm} = \mathbf{k}_n - \mathbf{k}_m$  的平面光栅。

令  $E_1 = \sqrt{I_1} \exp(i\varphi_1)$ ,  $E_2 = \sqrt{I_2} \exp(i\varphi_2)$ ,  $E_3 = \sqrt{I_3} \exp(i\varphi_3)$ ,  $E_4 = \sqrt{I_4} \exp(i\varphi_4)$ , 代入(4)式经整理得:

$$\left. \begin{aligned} \partial \sqrt{I_1} / \partial z &= -\sqrt{I_1} \alpha / 2 + qI_2 \sqrt{I_3} \sin \beta_1 - 2q \sqrt{I_1 I_2 I_4} \sin \beta_2, \\ \partial \sqrt{I_2} / \partial z &= -\sqrt{I_2} \alpha / 2 + qI_1 \sqrt{I_4} \sin \beta_2 - 2q \sqrt{I_1 I_2 I_3} \sin \beta_1, \\ \partial \sqrt{I_3} / \partial z &= -\sqrt{I_3} \alpha / 2 + qI_2 \sqrt{I_1} \sin \beta_1, \\ \partial \sqrt{I_4} / \partial z &= -\sqrt{I_4} \alpha / 2 + qI_1 \sqrt{I_2} \sin \beta_2; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial \varphi_1 / \partial z &= q(I_1 + 2I_2 + 2I_3 + 2I_4) + qI_2 \sqrt{I_3/I_1} \cos \beta_1 + 2q \sqrt{I_2 I_4} \cos \beta_2, \\ \partial \varphi_2 / \partial z &= q(I_2 + 2I_1 + 2I_3 + 2I_4) + qI_1 \sqrt{I_4/I_2} \cos \beta_2 + 2q \sqrt{I_1 I_3} \cos \beta_1, \\ \partial \varphi_3 / \partial z &= q(I_3 + 2I_1 + 2I_2 + 2I_4) + qI_2 \sqrt{I_1/I_3} \cos \beta_1, \\ \partial \varphi_4 / \partial z &= q(I_4 + 2I_1 + 2I_2 + 2I_3) + qI_1 \sqrt{I_2/I_4} \cos \beta_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中  $\beta_1 = \varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2 - \Delta k z$ ,  $\beta_2 = \varphi_2 + \varphi_4 - 2\varphi_1 - \Delta k z$ , 由(7)式得:

$$\left. \begin{aligned} \partial \beta_1 / \partial z &= q(2I_2 - I_1 - I_3) + 2q(\sqrt{I_2/I_4} - I_1 \sqrt{I_4/I_2}) \cos \beta_2 \\ &\quad + q[I_2(\sqrt{I_3/I_1} + \sqrt{I_1/I_3}) - 4\sqrt{I_1 I_3}] \cos \beta_1 - \Delta k, \\ \partial \beta_2 / \partial z &= q(2I_1 - I_2 - I_4) + 2q(\sqrt{I_1/I_3} - I_2 \sqrt{I_3/I_1}) \cos \beta_1 \\ &\quad + q[I_1(\sqrt{I_4/I_2} + \sqrt{I_2/I_4}) - 4\sqrt{I_2 I_4}] \cos \beta_2 - \Delta k, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

边界条件为

$$I_1|_{z=0} = I_{10}, \quad I_2|_{z=0} = I_{20}, \quad I_3|_{z=0} = I_4|_{z=0} = 0$$

若两入射光  $E_p$ ,  $E_s$  的入射光强相等, 为简单起见, 假设两束光的入射方向呈几何对称以及克尔介质是各向同性, 故它们的衍射光强间存在  $I_1(z) = I_2(z)$ ,  $I_3(z) = I_4(z)$ , 则由(6)式、(7)式及(8)式可得:

$$\left. \begin{aligned} \partial \sqrt{I_1} / \partial z &= -\sqrt{I_1} \alpha / 2 - qI_1 \sqrt{I_3} \sin \beta, \\ \partial \sqrt{I_3} / \partial z &= -\sqrt{I_3} \alpha / 2 + qI_3 \sqrt{I_1} \sin \beta; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial \varphi_1 / \partial z &= q(3I_1 + 4I_3) + 3q \sqrt{I_1 I_3} \cos \beta, \\ \partial \varphi_3 / \partial z &= q(3I_3 + 4I_1) + qI_1 \sqrt{I_1/I_3} \cos \beta; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\partial \beta / \partial z = q(I_1 - I_3) + q(-3\sqrt{I_1 I_3} + I_1 \sqrt{I_1/I_3}) \cos \beta. \quad (11)$$

其中  $\beta = \varphi_3 - \varphi_1 - \Delta k \cdot z$ ,  $\Delta k = (2k_1 - k_2 - k_3) \cdot z$ , 由(11)可知,  $\beta$  的边界条件为:

$$\beta_{z=0} = \pi/2$$

### 3 数值计算及分析

数值计算中, 采用四阶龙格-库塔法, 取耦合常数  $q = 1000 \text{ cm/kW}$ , 克尔介质的吸收系数  $\alpha = 50 / \text{cm}$ 。图 2 所示的为出射零级衍射光  $I_1$  和一级衍射光  $I_3$  的归一化强度 [ $I_1$ 、 $I_3$  分别对  $I_1(0)$  归一化] 随介质厚度的变化的情况。可以看出, 随着介质厚度的变化, 一级衍射光的强度有一峰值 ( $z_0$  处), 由式(9)可知, 当  $-\sqrt{I_3} \alpha / 2 + qI_3 \sqrt{I_1} \sin \beta = 0$  时,  $I_3$  有极大值, 显然光波的位相变化  $\sin \beta$  对  $z_0$  值的影响较大, 若介质无吸收时, 即  $\alpha = 0$  时,  $z_0$  就是  $\sin \beta = 0$  所对应的  $z$  值。

随着位相失配的变化, 自衍射和介质厚度的变化关系如图 3 所示。显然位相匹配时, 即  $\Delta k = 0$ , 自衍射效率交不是最大。当  $z < z_0$  时,  $\sin \beta|_{\Delta k=0} < \sin \beta|_{\Delta k=50 \text{ cm}^{-1}}$  [见图 4], 这说明  $\Delta k = 50 \text{ cm}^{-1}$  时, 位相失配补偿了光波的位相变化。由(4)式可知, 实际上是二波混频项影响了光波位相的变化, 当不考虑二波混频项时, 位相匹配的情况下,  $\sin \beta$  的值始终为 1, 自衍射效率最大 [见图 5、图 6], 另外, 对于不同的介质厚度, 自衍射效率随着位相失配的变化都存在一个峰值 [见图 7], 而对应的  $\Delta k$  处,  $\sin \beta$  也有一峰值 [见图 8], 这也说明了位相失配补偿了由二波混频项所引起的位相变化。

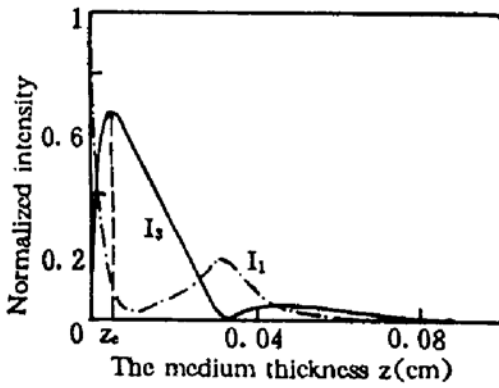


Fig. 2 Plot of normalized intensities of the incident-beam  $I_1$  and the first-order diffracted-beams  $I_3$  as a function of the medium thickness  $z$ ,  $I_1(0) = 0.5 \text{ kW/cm}^2$ ,  $\Delta k = 50 \text{ cm}^{-1}$

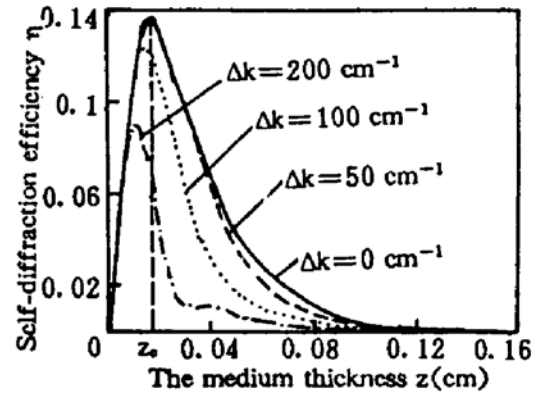


Fig. 3 Plot of self-diffraction efficiency  $\eta$  as a function of the medium thickness  $z$  for increasing values of  $\Delta k$  with TWM;  $I_1(0) = 0.06 \text{ kW/cm}^2$

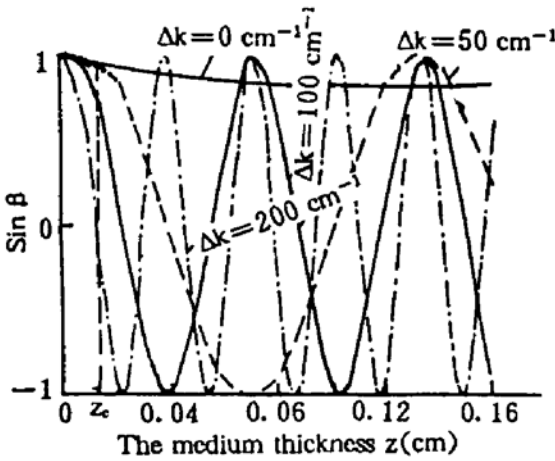


Fig. 4 Plot of  $\sin \beta$  as a function of the medium thickness  $z$  for increasing values of  $\Delta k$  with TWM;  $I_1(0) = 0.06 \text{ kW/cm}^2$

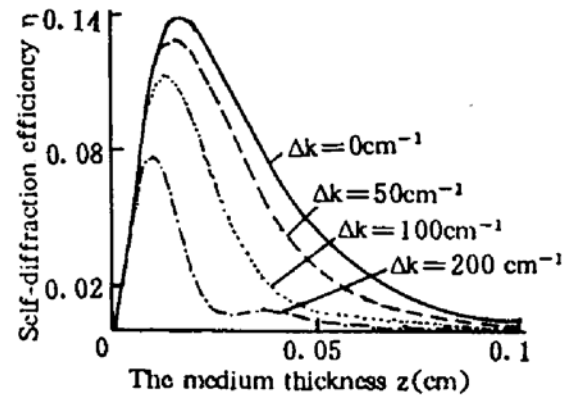


Fig. 5 Plot of self-diffraction efficiency  $\eta$  as a function of the medium thickness  $z$  for increasing values of  $\Delta k$  without TWM;  $I_1(0) = 0.06 \text{ kW/cm}^2$

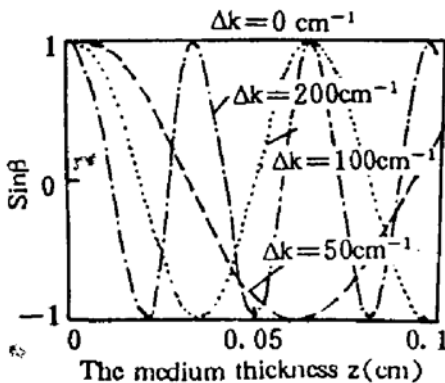


Fig. 6 Plot of  $\sin \beta$  as a function of the medium thickness  $z$  for increasing values of  $\Delta k$  without TWM;  $I_1(0) = 0.06 \text{ kW/cm}^2$

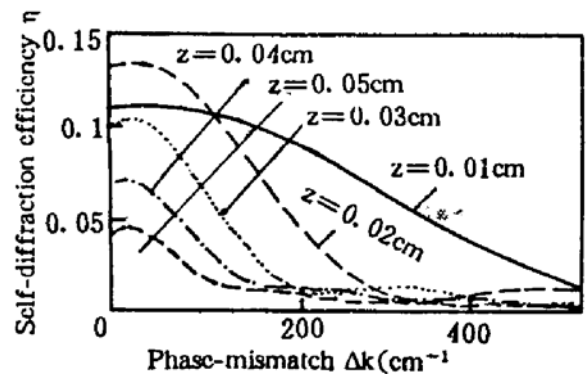


Fig. 7 Plot of self-diffraction efficiency  $\eta$  as a function of  $\Delta k$  with TWM for various values of the medium thickness  $z$ ;  $I_1(0) = 0.06 \text{ kW/cm}^2$

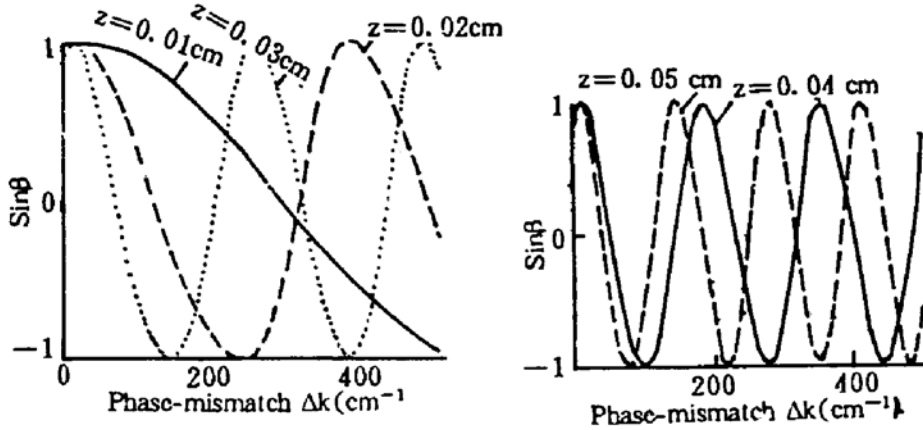


Fig. 8 Plot of  $\sin \beta$  as a function of  $\Delta k$  with TWM for various values of the medium thickness  $z$ ;  $I_1(0) = 0.06 \text{ kW/cm}^2$

入射光的强弱对自衍射效率  $\eta$  的影响很大。当入射光  $I_1(0)$  逐渐增强时，自衍射效率  $\eta$  的峰值也逐渐增大[见图 9]，当入射光足够强时，还伴随着振荡[图 9(b)中的曲线 2、曲线 3、曲线 4]，这主要是由于光波耦合过程中相位的位相变化  $\sin \beta$  引起的[见图 10]。实际应用中，介质的厚度是一定的，需考虑这种情况下自衍射效率  $\eta$  的大小，有趣有是自衍射效率  $\eta$  随入射光的强度呈起伏变化[见图 12]，分析图 11 可知，这是由于入射光强增大时  $\sin \beta$  的符号变化造成的。因此，入射光增强过程中，光波的位相变化  $\sin \beta$  对自衍射效率  $\eta$  有很大的影响。

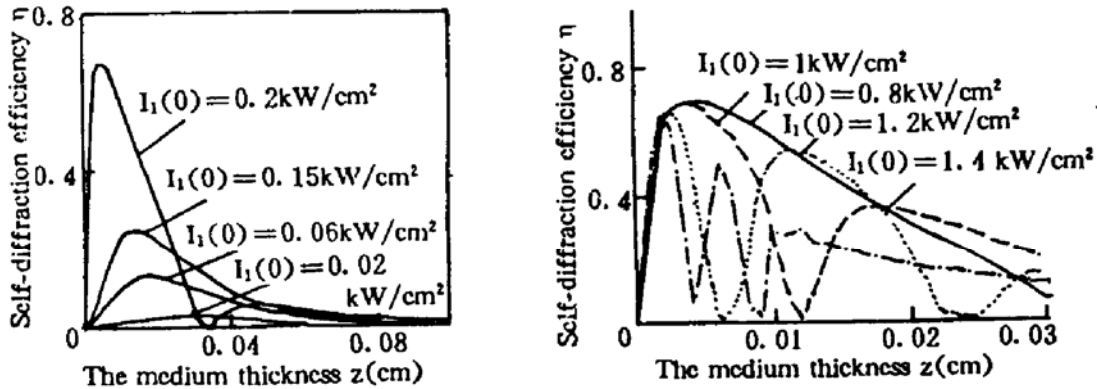


Fig. 9 Plot of self-diffraction efficiency  $\eta$  as a function of the medium thickness  $z$  for various incident-intensity  $I_1(0)$ ;  $\Delta k = 50 \text{ cm}^{-1}$ , (a) 1;  $I_1(0) = 0.02 \text{ kW/cm}^2$

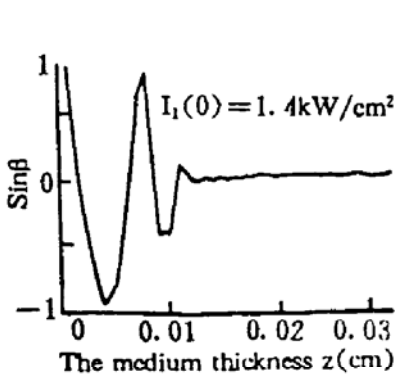


Fig. 10 Plot of  $\sin \beta$  as a function of the medium thickness  $z$ ;  $\Delta k = 50 \text{ cm}^{-1}$ ,  $I_1(0) = 1.4 \text{ kW/cm}^2$

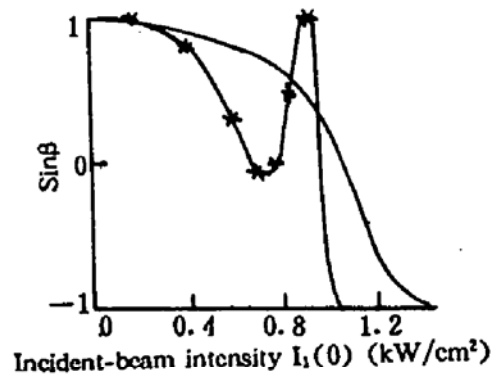


Fig. 11 Plot of  $\sin \beta$  as a function of the incident-beam intensity  $I_1(0)$  for values of the medium thickness  $z$ ;  $\Delta k = 0$ ,  $z = 0.004 \text{ cm}$  for (a) and  $0.01 \text{ cm}$  for (b)

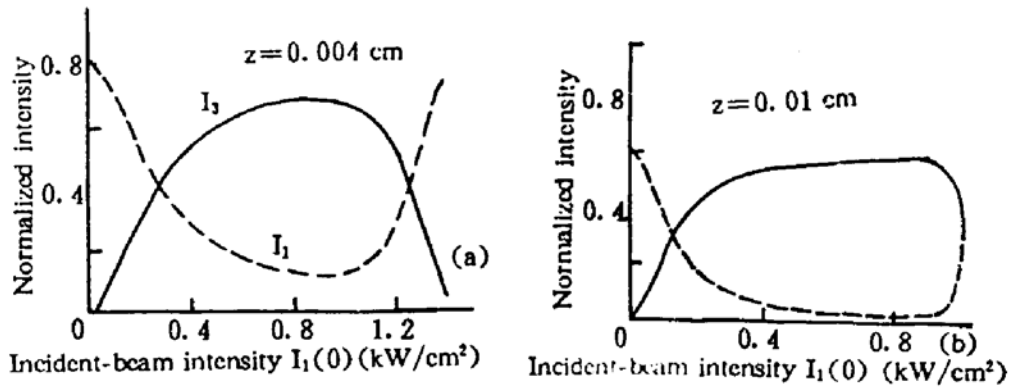


Fig. 12 Plot of normalized intensities of the incident-beam  $I_1$  and the first-order diffracted beam  $I_3$  as a function of the incident-beam intensity  $I_1$  for various values of the medium thickness  $z$ ;  $\Delta k = 0$ ,  $z = 0.004$  cm for (a) and 0.01 cm for (b)

**结 论** 综上所述,薄克尔介质中,光波的位相变化强烈地影响着自衍射效率的大小;光波的位相失配能补偿光波的位相变化;二波混频项通过光波的位相变化对自衍射效率有一定的影响。为了获得较高的自衍射效率,必须选用吸收系数较小、厚度适当的克尔介质以及光强适中的入射光。

### 参 考 文 献

- [1] I. C. Khoo *et al.*, Theory and experiments on multiwave-mixing-mediated probe-beam amplification. *Phys. Rev. A*, 1989, **39**(8): 4036~4044  
 [2] F. Sanchez, Two-wave mixing in thin nonlinear local-response media: a simple theoretical model. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1992, **9**(12): 2196~2205  
 [3] H. J. Eichler *et al.*, *Laser-induced dynamic grating*. 1986, Springer-Verlag

## Theoretical Study on Self-Diffraction Efficiency of Optical Wave in Kerr Medium

Wang Kangwen

(Shanghai Institute of Technical Physics, Academia Sinica, Shanghai 200083)

Li Qu      Chen Xianfeng      Chen Yingli

(Department of Applied Physics, Jiaotong University, Shanghai 200030)

(Received 5 June 1994)

**Abstract** The effects of various factors such as interaction length, losses in Kerr medium and incident-beam intensity on self-diffraction efficiency are studied by using theoretical model on forward-four-wave-mixing. The effects of phase-modulation, phase-mismatch and two-wave-mixing terms are clearly identified. Further theoretical analyses are given.

**Key words** Kerr medium, self-diffraction.