

哈特曼波前探测及波前校正的仿真 与误差分析

吴 毅 王英俭

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031)

摘 要 报道了以 37 单元自适应光学系统为原型的波前校正计算机仿真模型。讨论了系统波前哈特曼(Hartmann)探测误差, 拟合误差以及变形镜波前复原误差。提出了自适应光学系统在校正大气湍流引起的波前位相畸变时存在最佳有效孔径的设想。

关键词 自适应光学, 波前校正, 仿真。

1 引 言

由天文学家们提出的自适应光学技术目的就是为了校正大气湍流对光波的扰动。目前以波前传感器和变形反射镜为核心的自适应光学系统是校正大气扰动引起的光束位相畸变的最可行的手段。国内外都在积极着眼于对其系统和数学描述的研究。Lincoln 实验室和 Lockheed 公司在研究激光大气传输自适应光学校正的 Molley 程序和 Grand 程序^[1,2]时均提出了类似的由光场信息直接获取哈特曼探测波前斜率和波前复原的算法。姜文汉等^[3]人也提出了直接斜率波前复原算法。当然一个实际的自适应光学系统在进行波前校正时存在着若干误差环节, 正如 Tyson 等^[4]人在理论分析中所指出的存在探测误差, 拟合误差和控制误差等等。本文以中国科学院光电所研制的 37 单元自适应光学系统为原型, 在不考虑系统控制影响时, 通过计算机对自适应光学系统波前校正的各个环节进行仿真, 提取误差进行讨论, 描述了一个自适应光学系统的数学模型。在该模型中采用的光学成像方法再现了波前传感的实际过程, 这有别于以前的直接斜率计算法^[1,2], 同时便于考虑探测过程中的误差源。波前复原算法采用的是 Zernike 多项式展开的模式复原算法^[5]。在进行误差讨论的基础上, 本文提出了自适应光学系统在校正大气湍流引起的波前位相畸变时存在最佳有效孔径的设想。

2 仿真模型

37 单元自适应光学系统原型及其布局如图 1 所示。其中六角形为哈特曼传感器的子孔径列阵, 黑圆点为各驱动器在变形镜上的布局位置, 粗线圆为传感器探测及变形镜复原的波前区域。最外圈的 18 个驱动器点不参与波前复原运算, 只是起限定边界条件的作用。本文定义三种波前以讨论仿真过程及误差: 1) 原始波前, 即到达传感器分割面上的信标波前, 它可

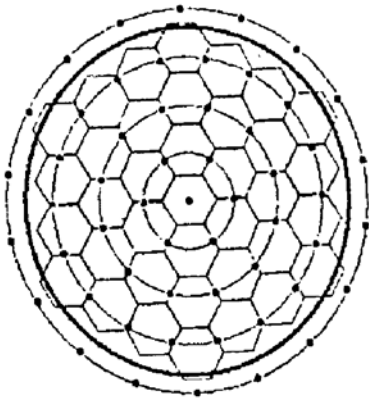


Fig. 1 Layout of the 37-element adaptive optics system

以是湍流或其它模拟波前；2) 拟合波前，即由传感器对信标原始波前探测的斜率信息所反演的提供变形镜波前复原的参照波面；3) 复原波前，即变形镜受驱动器驱动影响后的波前。后两种波前均以原始波前为参照而进行误差的讨论。该自适应光学系统是基于哈特曼传感器对信标光波前在各个子孔径上的平均斜率信息的提供完成波前复原的。其过程基本上是由原始波前至复原波前，当然没有必要一定经过拟合波前，这就是所谓直接斜率复原法。该方法大致是由斜率信息同变形镜的影响函数相耦合，直接获得各驱动器上的驱动电压^[3]。

本文采用将信标光波前展开成 Zernike 像差多项式的模式算法，由波前的斜率信息求解展开式的各阶系数，得到 Zernike 多项式拟合波前，再由该拟合波前为参照获得变形镜各驱动器的驱动电压，得到变形镜复原波前。

2.1 哈特曼传感器波前斜率探测：

基于哈特曼传感器提取的是子孔径面上波前的平均斜率，即光斑重心，它与波前在子孔径面上的几何光程差有着较大的依赖关系，原则上讲，相对孔径数较小的探测系统，只要其成像光斑由于衍射的影响没有超出探测子窗口区域是不会影响重心提取的。所以本文采用几何光学星点成像法描述子孔径 CCD 像面上的光斑强度分布。在实际探测系统中子窗口区域为 16×16 像素点；对于绝大多数的扰动波前，其成像光斑尺寸通常为 6×6 像素点，没有超出探测子窗口区域。图 2 所示的是图 5 的湍流扰动信标光波前在哈特曼传感器 CCD 像面上的星点光斑图像仿真的一个例子。仿真过程如下。

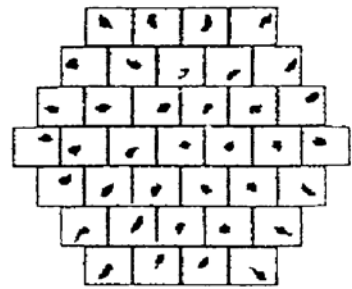


Fig. 2 The star-point picture of wavefront type (I) on Hartmann sensor

对于原始波前 $\varphi(x, y)$ (它是模拟的受湍流扰动或其它扰动的信标光波前) 在 CCD 像面上的成像像素坐标为：

$$x' = \frac{\lambda f}{2\pi d} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \quad y' = \frac{\lambda f}{2\pi d} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}, \quad (1)$$

式中 f 为子镜焦距， d 为 CCD 像素尺寸 ($60 \mu\text{m}$)， λ 为波长。所以子光斑强度图像为：

$$W(x', y') = I(x \rightarrow x', y \rightarrow y') \quad (2)$$

式中 $I(x, y)$ 为信标光在子镜面上的强度分布。由 $x \rightarrow x'$ 和 $y \rightarrow y'$ 的坐标变换是从 $\partial\varphi(x, y)/\partial x$ 和 $\partial\varphi(x, y)/\partial y$ 而来，它们不是一一对应的。子光斑重心为：

$$\left. \begin{aligned} x_c^i &= \int_{S_i} x' W(x', y') dx' dy' / \int_{S_i} W(x', y') dx' dy', \\ y_c^i &= \int_{S_i} y' W(x', y') dx' dy' / \int_{S_i} W(x', y') dx' dy', \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

所以波前斜率为：

$$T_x^i = x_c^i / f, \quad T_y^i = y_c^i / f, \quad (4)$$

式中上标 i 表示第 i 个子孔径， S_i 表示第 i 个子孔径面积。信标光束的整体倾斜可以由哈特曼传感器的斜率输出直接获得，即：

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_x &= a_1 = \sum_{i=1}^{37} T_x^i / 37, & (x \text{ 方向倾斜}) \\ \bar{T}_y &= a_2 = \sum_{i=1}^{37} T_y^i / 37, & (y \text{ 方向倾斜}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

波前的平均值 $a_0 = (1/S) \int_S \varphi(x, y) dx dy$ 对自适应光学系统的波前复原校正无关紧要, 且哈特曼传感器亦无法探测此值。

采用上述仿真方法可以考虑 CCD 噪声、像素离散及 A/D 量化对探测误差的影响。

2.2 变形镜波前复原:

在模式法波前复原中, 首先必须求得除 x, y 方向倾斜的 Zernike 多项式的系数, 即 $\varphi'(x, y) = \sum_{K=3}^N a_K Z_K(x, y)$ 中的 a_K 值, 以得到对原始波前 $\varphi(x, y)$ 的拟合波前 $\varphi'(x, y)$ 。因此将哈特曼传感器的输出量表示为:

$$\left. \begin{aligned} T_x^i - \bar{T}_x &= \frac{\lambda}{2\pi S_i} \int_S \sum_{K=3}^N a_K \frac{\partial}{\partial x} Z_K(x, y) dx dy, \\ T_y^i - \bar{T}_y &= \frac{\lambda}{2\pi S_i} \int_S \sum_{K=3}^N a_K \frac{\partial}{\partial y} Z_K(x, y) dx dy, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6)式以 37 单元系统为原型可以被改写成矩阵

$$\left. \begin{aligned} [TH_x]_{37, 1} &= [Z_{T_x}]_{37, N-3} [A]_{N-3, 1} \\ [TH_y]_{37, 1} &= [Z_{T_y}]_{37, N-3} [A]_{N-3, 1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 TH_x 和 TH_y 的元素分别为 $T_x^i - \bar{T}_x, T_y^i - \bar{T}_y, A$ 为 a_K 矩阵, Z_{T_x} 和 Z_{T_y} 分别为:

$$\left. \begin{aligned} Z_{T_x} &= [Z_{T_x}]_k^i = \frac{1}{S_i} \int_S \frac{\partial}{\partial x} Z_K(x, y) dx dy \\ Z_{T_y} &= [Z_{T_y}]_k^i = \frac{1}{S_i} \int_S \frac{\partial}{\partial y} Z_K(x, y) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (K \geq 3) \quad (8)$$

由 Zernike 多项式的特性可知矩阵 Z_{T_x}, Z_{T_y} 的任意两行或两列线性无关。将上述矩阵方程作变换得:

$$Z_{T_x}^T TH_x = Z_{T_x}^T Z_{T_x} A, \quad Z_{T_y}^T TH_y = Z_{T_y}^T Z_{T_y} A \quad (9)$$

其中 $Z_{T_x}^T$ 和 $Z_{T_y}^T$ 分别为 Z_{T_x} 和 Z_{T_y} 的转置。最终有:

$$\left. \begin{aligned} Z_{T_x}^T TH_x + Z_{T_y}^T TH_y &= (Z_{T_x}^T Z_{T_x} + Z_{T_y}^T Z_{T_y}) A \\ A &= (Z_{T_x}^T Z_{T_x} + Z_{T_y}^T Z_{T_y})^{-1} (Z_{T_x}^T TH_x + Z_{T_y}^T TH_y) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10)式即是由哈特曼传感器的斜率数据求解的 Zernike 多项式拟合波前系数 $a_K (K = 3, \dots, N)$ 。在本文的波前拟合中 N 取 35。这是因为哈特曼传感器的单元数是有限的(37 单元, 见图 1), 再高的拟合阶数不仅无益于拟合精度, 且易使矩阵 $(Z_{T_x}^T Z_{T_x} + Z_{T_y}^T Z_{T_y})$ 发生奇异。

本文在仿真中采用的变形镜面型影响函数为高斯型:

$$f_i(x, y) = D_i \exp \left(- |\ln p| \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2}{d^2} \right), \quad (r^2 = x^2 + y^2) \quad (11)$$

式中 d 为驱动器平均间距, p 为影响函数交链值, 即当驱动器 i 位移 1 个单位时在相邻驱动器位置上变形镜面形改变值。写出拟合波前与复原波前之间的方差表达式:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_S \left[\sum_{K=3}^{35} a_K Z_K(x, y) - \sum_{i=1}^{37} f_i(x, y) \right]^2 dx dy \\ &= \int_S \left[\sum_{K=3}^{35} a_K Z_K(x, y) - \sum_{i=1}^{37} D_i \exp \left(- |\ln p| \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2}{d^2} \right) \right]^2 dx dy \end{aligned} \quad (12)$$

在最小方差意义上求解变形镜各驱动器的位移量 D_i 。令：

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial D_j} = \int_S \left[\sum_{K=3}^{35} a_K Z_K(x, y) - D_i \exp\left(-|\ln p| \frac{|r - r_i|^2}{d^2}\right) \exp\left(-|\ln p| \frac{|r - r_i|^2}{d^2}\right) \right] dx dy = 0 \quad (13)$$

于是有被积函数为零的矩阵表达式：

$$\left. \begin{aligned} Z_f A &= f D \\ [Z_f]_{iK} &= \int_S \exp\left(-|\ln p| \frac{|r - r_i|^2}{d^2}\right) Z_K(x, y) dx dy, \quad K = 1 \cdots 35, i = 1 \cdots 37 \\ [f]_{ij} &= \int_S \exp\left(-|\ln p| \frac{|r - r_i|^2}{d^2}\right) \exp\left(-|\ln p| \frac{|r - r_j|^2}{d^2}\right) dx dy, \quad j = 1 \cdots 37 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

所以变形镜各驱动器的位移矩阵为：

$$D = f^{-1} Z_f A. \quad (15)$$

3 结果与误差讨论

图 3 给出的是 Zernike 四阶像差(像散)在 37 个子孔径上的平均斜率,以 CCD 像面上子光斑重心偏离中心像素表示。图 3(a),图 3(b)分别为 x 、 y 方向斜率。图中 A (空心条)是直接由 Zernike 导数函数在各子孔径上的平均值获得, B (实心条)是经由哈特曼传感器斜率探测仿真而来。可以看出两者之间存在一定的差别,而 B 相对 A 的误差主要来源于 CCD 像面上像素坐标 $60 \mu\text{m}$ 整型化及光强 8 bit A/D 量化计算引起的。这一误差虽然不大,但实际上反映对哈特曼波前传感中空间及动态光强分辨率的要求。这两项要求是很重要的。另外波前传感中还存在 CCD 读出噪声及信标光强度起伏对波前斜率探测带来的影响。本文暂没考虑过两项误差,因为图 3 给出的是标准像差,提出上述误差源以作为对探测系统进一步研究的问题。

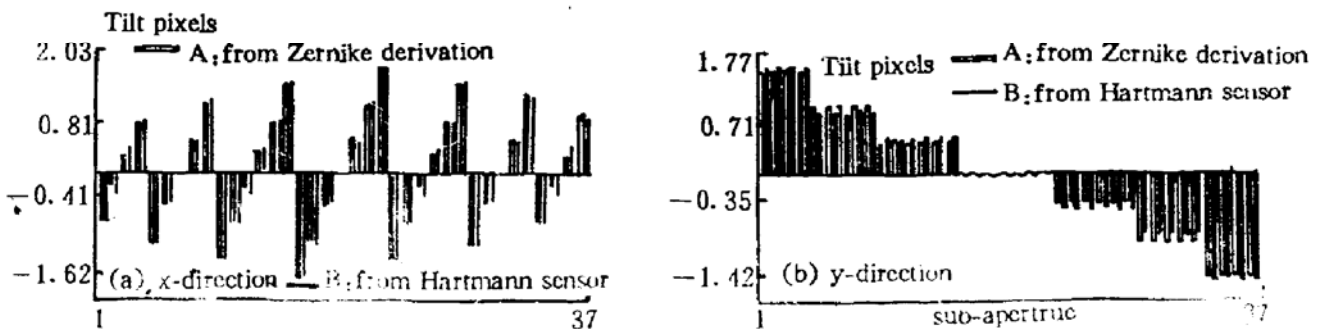


Fig. 3 Tilts of astigmatism on 37-subapertures

图 4~6 给出了几种模拟的信标光波前和通过哈特曼传感的波前斜率探测后的拟合波前以及变形镜复原波前的仿真结果。同时给出了未校正波前和经共轭复原校正后剩余误差波前在透镜焦平面上的成像光强分布。其中图 4(波前 I)是预先产生一组随机数 a_k 作为 Zernike 多项式的系数,构造出一个扰动波前,再经哈特曼波前斜率探测,反解出 a_k 得到拟合波前和复原波前。从中可以看出此时的拟合波前在全孔径内与原始波前之间的剩余波前方差是很小的。这里没有任何拟合误差,因为原始波前已经用有限序列的 a_k 截断,所存在的方差应该说是反映了波前传感误差。而变形镜复原波前同原始扰动波前之间在全孔径面上的剩余方差比前一种方差大 2 个量级(见表 1)。这完全是变形镜的有限驱动单元和布局所造成的固有误差,它取决于信标光波前的空间结构和变形镜的面型影响函数。

Table 1. The fitted and DM reconstructed wavefront variance and their residuals for several types of Wavefront

	variance
original wavefront (I)	$r^2 = 0.8087$
a_k fitted wavefront	$r^2 = 0.8680$
residuals from fitting	$r^2 = 0.0016$
DM reconstructed wavefront	$r^2 = 0.6939$
residuals from reconst.	$r^2 = 0.1612$
original wavefront (II)	$r^2 = 2.3643$
a_k fitted wavefront	$r^2 = 2.2763$
residuals from fitting	$r^2 = 0.0916$
DM reconstructed wavefront	$r^2 = 1.9481$
residuals from reconst.	$r^2 = 0.4901$
original wavefront (III)	$r^2 = 2.7708$
a_k fitted wavefront	$r^2 = 2.7694$
residuals from fitting	$r^2 = 0.0013$
DM reconstructed wavefront	$r^2 = 2.7817$
residuals from reconst.	$r^2 = 0.1230$

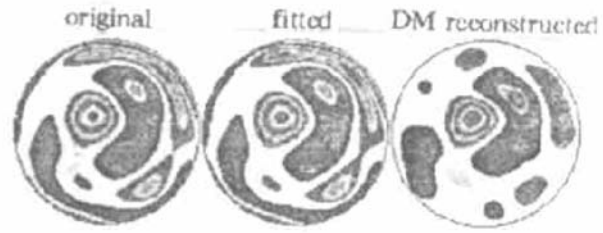


Fig. 4 Results for simulated wavefront, type (I)

图 5, 6 分别是湍流扰动位相(波前 II)和稳态热晕位相(波前 III)以及它们的拟合波前与变形镜复原波前。同时给出了它们分别在校正前、后的透镜焦平面上的光强分布情况。同样可以看到变形镜复原波前与原始波前之间的剩余方差远大于拟合波前与原始波前之间的剩余方差。这说明在自适应光学波前校正中除本文没有考虑的控制误差外, 变形镜的响应误差是系统中一个较大的误差源。

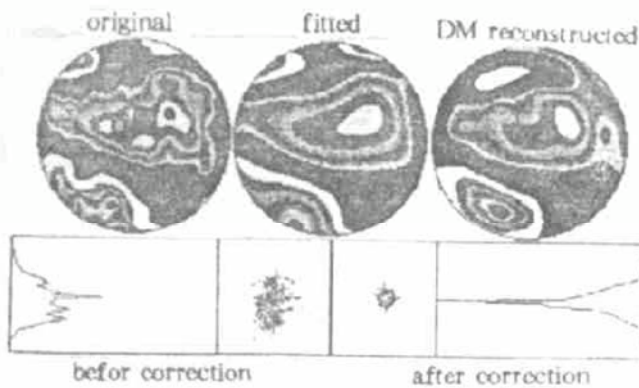


Fig. 5 Results for a turbulence wavefront, type (I) with $d/r_0 = 0.7$

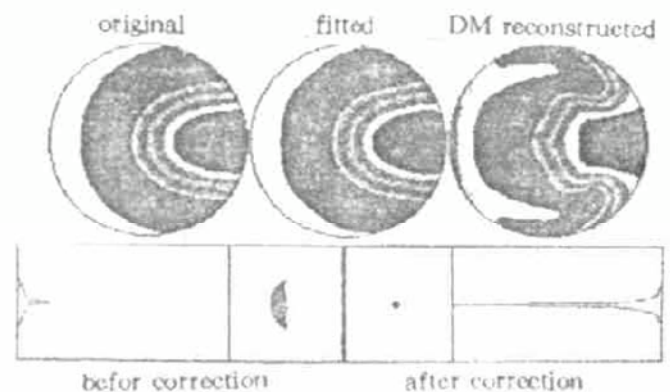


Fig. 6 Results for a thermal blooming wavefront, type (II)

对热晕波前斜率探测后的波前拟合来讲, 由于热晕扰动波前的空间频率较低, Zernike 多项式的反演系数 a_k 收敛较快(见图 7a), 所以 Zernike 多项式对原始波前的拟合精度亦相对较高。而对湍流波前的拟合来讲, 由于湍流扰动波前的空间频率较高, 有较多的小结构, 此时虽然 Zernike 多项式的反演系数亦趋于收敛(见图 7b), 但仍然存在较大的拟合误差。图 6 所示的拟合波前实际上只反映了原始波前的大结构信息而对小结构信息却没什么反映, 这样给变形镜波前复原所提供的参照信息自然就含有较大的误差(见表 1 中 II)。另一方面, 由于 Zernike 多项式的基本形式为 $r^m \cos(m\theta)$ 或 $r^m \sin(m\theta)$, 它们的高阶项在归一化圆孔径(Zernike 多项式的正交区域)内的中心地带信息比较微弱, 因此当扰动波前的小结构出现在中心地带时, 反演所解释出的高频成份亦往往出现在边缘处。相反变形镜驱动器的面积密度在中心地带大而在边缘处小(见图 1)。这样有可能传递了从拟合到复原的波前误差。本文基于上述考虑, 研究了自适应光学系统边缘效应的影响。

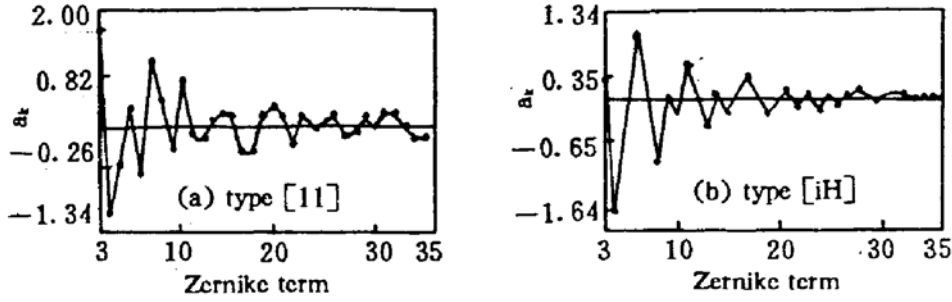


Fig. 7 Coefficients of Zernike polynomial for wavefront type (II) and (III)

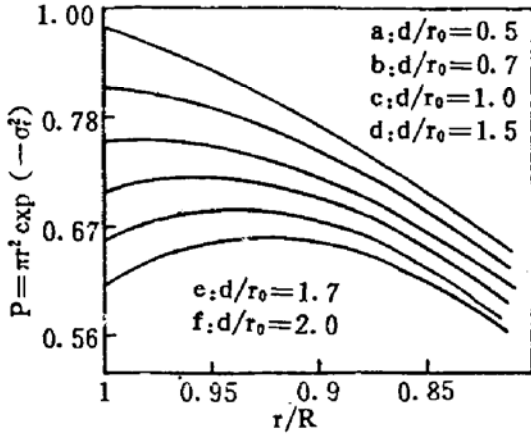


Fig. 8 Variation of parameter P with the relative aperture size

首先在全孔径(即粗线圆, 半径 R) 内进行波前探测、波前拟合及变形镜复原解耦运算。在获得变形镜复原波前之后可以求出它与原始波前之间在某一圆面积(半径 $r \leq R$) 内的剩余波前方差 σ_r^2 。然后考虑一个参数 $P = \pi r^2 \exp(-\sigma_r^2)$ 随 r 的变化。因为此时 σ_r^2 是 r 的函数, 并且一般认为 $\exp(-\sigma_r^2)$ 可以近似代表光束远场质量的 Strehl 比。而 πr^2 相应于在发射望远镜上遮加光阑的透光面积, 或者说是变形镜对发射主激光的校正区域面积。所以参数 P 表示了光束 Strehl 比发射激光功率之积。图 8 给出了这一参数 P 在不同的大气湍流相干长度 r_0 与驱动器平均间距 d 之比的情况下随相对发射光束半径变化的演变结果。

横坐标为 r/R , 其中 R 是图 1 粗线圆半径。可以看到在 d/r_0 大于 1 的情况下, P 参数随 r/R 出现一个极值点, 且该极大值点随 d/r_0 增大而向小的 r/R 方向移动, 但该极值所处圆的半径 r 仍然大于 $0.84 R$ (外圈 18 个驱动器所围圈之圆半径)。本文将这一效应视为自适应光学系统在校正大气湍流位相畸变(当 d/r_0 大于 1) 时所可能存在的最佳有效孔径。这也就是说通过收缩发射望远镜的口径可以适当提高驱动器对变形镜面的有效影响, 获得光束远场 Strehl 比与能量之积的最佳效果, 从这一角度上最大限度地提高自适应光学系统的补偿效率。

小 结 本文以 37 单元自适应光学系统为原型, 探讨了哈特曼波前斜率探测和变形镜波前复原的计算机仿真。与以往文献所不同的是本文在对哈特曼波前探测的仿真中, 完全采用了再现子孔径分割成像的方法进行波前斜率信息的提取。这样可以通过实际成像的仿真了解探测误差和误差来源。文中以波前类型 II, III 讨论了拟合波前误差与信标光波前空间频率的关系以及拟合误差对变形镜波前复原误差的影响。同时表 1 中的数值结果交代了有限单元驱动器的变形镜波前复原误差远大于波前拟合误差。在拟合较好的情况下, 前者比后者大两个量级。以往的很多工作大都采用直接斜率法^[1~3], 而略去波前拟合的过程, 本文的方法亦在文献[3]中有所描述, 其实两种方法是殊途同归, 都是寻求变形镜复原波前, 且互有优缺点。在讨论了波前拟合、波前复原误差以及系统边缘效应影响的基础上, 本文提出了自适应光学系统在校正大气湍流位相畸变时可能存在最佳有效孔径的设想。当然对一个实际的自适应光学系统的仿真还远不止这些问题需要研究。

参 考 文 献

- [1] J. F. Schonfeld, Analysis and modeling of thermal blooming compensation. *Proc. SPIE*, 1990, 1221 : 118~131
- [2] R. V. Digumarthi, N. C. Metha, R. M. Blankinship, Effects of a realistic adaptive optics system on the atmospheric propagation of a high energy laser beam. *Proc. SPIE*, 1990, 1221 : 157~164
- [3] W. H. Jiang, H. G. Li, Hartmann-shack wavefront sensing and wavefront control algorithm. *Proc. SPIE*, 1990, 1271 : 83~93
- [4] R. K. Tyson, D. P. Crawford, R. J. Morgan, Adaptive optics system considerations for ground-to-space propagation. *Proc. SPIE*, 1990, 1221 : 146~156
- [5] R. J. Noll, Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. O. S. A.*, 1976, 66(3) : 207~211

Simulation and Error Analysis for Hartmann Wavefront Sensing and Deformable Mirror Wavefront Recovery

Wu Yi Wang Yingjian

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Hefei 230031)

(Received 13 January 1994; revised 14 April 1994)

Abstract A computer simulation for deformable mirror wavefront recovery of a 37-element adaptive optics system is reported. The errors of Hartmann wavefront sensing, fitted wavefront and deformable mirror wavefront recovery are discussed. An optimized aperture, possibly existed in adaptive optics system, for correcting phase disturbance due to turbulence is suggested.

Key words Adaptive optics, wavefront recovery, computer simulation.