

依赖强度耦合 J-C 模型场熵的演化*

方卯发

(湖南师范大学物理系, 长沙 410081)

摘 要 研究了依赖强度耦合 J-C 模型场熵演化的动力学特性, 考察了原子相干性对场熵演化的影响。

关键词 场熵演化, 原子相干性。

1 引 言

依赖强度耦合 J-C 模型是 Buck 和 Sukumar^[1] 为反映光场与原子相互作用对场强度依赖性而提出的理论模型。目前, 许多作者研究了该模型中原子反转的崩溃与回复现象^[2], 光场的压缩效应^[3]以及光场的位相特性^[4]等。然而, 能够反映该模型中光场与原子关联效应的场熵演化特性则未见涉及。本文研究该模型中场熵的演化, 并讨论原子相干性对场熵演化的影响。

依赖强度耦合 J-C 模型的哈密顿量为

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 S_z + g(S_+ a \sqrt{a^+ a} + \sqrt{a^+ a} a^+ S_-) \quad (\hbar = 1), \quad (1)$$

式中 a^+ 、 a 为频率为 ω 的辐射场的产生和湮灭算符, S_z 、 S_{\pm} 为原子的反转和跃迁算符, 其跃迁频率为 ω_0 , g 为场与原子的耦合常数。为简单起见, 考虑共振情况(即 $\omega = \omega_0$), 在相互作用表象中, 利用标准的技巧^[5]可由(1)式的哈密顿量产生如下的时间演化算符:

$$U_I(t) = \left. \begin{aligned} & \begin{pmatrix} C & -iD \\ -iS & T \end{pmatrix} \\ & C = \cos [(a^+ a + 1)gt] \quad S = \sin (a^+ a g t) (a^+ a)^{-1/2} a^+ \\ & T = \cos (a^+ a g t) \quad D = a(a^+ a)^{-1/2} \sin (a^+ a g t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

不失一般性, 假定原子初始处于基态 $|g\rangle$ 和激发态 $|e\rangle$ 的相干迭加态

$$|\theta, \varphi\rangle = \cos (\theta/2) |e\rangle + \exp (-i\varphi) \sin (\theta/2) |g\rangle, \quad (3)$$

而场处于相干态

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp (in \beta) |n\rangle, \quad b_n = \exp (-n_c/2) n_c^{n/2} / \sqrt{n!}, \quad (4)$$

式中 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 反映原子极化状态, n_c 和 β 分别为光场的初始平均光子数和位相

* 本课题得到国家自然科学基金资助。

收稿日期:1993年8月16日; 收到修改稿日期:1993年10月19日

角。设初始光场与原子是退耦合的, 则系统的初始密度算符为 $\rho(0) = \rho_f(0) \otimes \rho_A(0)$ 。这里 $\rho_f(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, $\rho_A(0) = |\theta, \varphi\rangle\langle\varphi, \theta|$ 分别是场和原子初始时刻的密度算符。 \otimes 为矩阵直乘算符。系统演化到任意时刻, 场的约化密度算符为

$$\begin{aligned} \rho_f(t) &= T_{r, atom}\{U_I(t) \rho(0) U^+(t)\} \\ &= |C\rangle\langle C| + |S\rangle\langle S| + |T\rangle\langle T| + |D\rangle\langle D| + |C\rangle\langle D| + |D\rangle\langle C| \\ &\quad + |S\rangle\langle T| + |T\rangle\langle S| \\ &\equiv |C'\rangle\langle C'| + |S'\rangle\langle S'|, \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} |C\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} C |\alpha\rangle = \cos \frac{\theta}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(in\beta) \cos[(n+1)gt] |n\rangle \\ |S\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} S |\alpha\rangle = \cos \frac{\theta}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(in\beta) \sin[(n+1)gt] |n+1\rangle \\ |T\rangle &= i \sin \frac{\theta}{2} \exp(-i\varphi) T |\alpha\rangle \\ &= i \sin \frac{\theta}{2} \exp(-i\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(in\beta) \cos(ngt) |n\rangle \\ |D\rangle &= -i \sin \frac{\theta}{2} \exp(-i\varphi) D |\alpha\rangle \\ &= -i \sin \frac{\theta}{2} \exp(-i\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(in\beta) \sin(ngt) |n-1\rangle \\ |C'\rangle &= |C\rangle + |D\rangle, \\ |S'\rangle &= |S\rangle + |T\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

利用场的约化密度算符, 可以对场熵演化的动力学特性进行研究。

2 场熵的计算公式

由 Phoenix 和 Knight^[5] 的工作可知, 场熵的计算之关键在于将场约化密度矩阵对角化, 求出其本征值。为此, 将(5)式的约化密度算符的本征函数写成如下形式:

$$|\psi_f\rangle = \mu |C'\rangle + \nu |S'\rangle, \quad (7)$$

将(5)式约化密度算符作用于(7)式本征函数, 得到

$$\begin{aligned} \rho_f(t) |\psi_f\rangle &= \{ \langle C'|C'\rangle + \langle C'|S'\rangle \frac{\nu}{\mu} \} \mu |C'\rangle \\ &\quad + \{ \langle S'|S'\rangle + \langle S'|C'\rangle \frac{\mu}{\nu} \} \nu |S'\rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

这里

$$\begin{aligned}
\langle C' | C' \rangle &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \cos^2 [(n+1)gt] + \sin^2 \frac{\theta}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \sin^2 (ngt) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sin \theta \sin (\varphi - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} b_n b_{n+1} \sin [2(n+1)gt] \\
\langle S' | S' \rangle &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \sin^2 [(n+1)gt] + \sin^2 \frac{\theta}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \cos^2 (ngt) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin \theta \sin (\varphi - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} b_n b_{n+1} \sin [2(n+1)gt] \\
\langle C' | S' \rangle &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n b_{n+1} \cos [(n+2)gt] \sin [(n+1)gt] \\
&\quad - \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n b_{n+1} \sin [(n+1)gt] \cos (ngt) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin \theta \left\{ \sin \varphi \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \cos [(n+1)gt] \cos (ngt) \right. \\
&\quad \left. - \sin (\varphi - 2\beta) \sum_{n=0}^{\infty} b_n b_{n+2} \sin [(n+2)gt] \sin [(n+1)gt] \right\} \\
&\quad + i \left\{ -\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n b_{n+1} \cos [(n+2)gt] \sin [(n+1)gt] \right. \\
&\quad \left. + \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n b_{n+1} \sin [(n+1)gt] \cos (ngt) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sin \theta \left\{ \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \cos [(n+1)gt] \cos (ngt) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos (\varphi - 2\beta) \sum_{n=0}^{\infty} b_n b_{n+1} \sin [(n+2)gt] \sin [(n+1)gt] \right\} \right\} \quad (9)
\end{aligned}$$

式中参数 $\langle C' | C' \rangle$ 、 $\langle S' | S' \rangle$ 以及 $\langle C' | S' \rangle$ 的实部和虚部中，第一项和第二项分别与激发态和基态有关，第三项则与激发态和基态的相干迭加情况有关。从(8)式可见，对于 $|\psi_f\rangle$ 为 $\rho_f(t)$ 的本征态，应有本征值

$$\lambda_f = \langle C' | C' \rangle + \langle C' | S' \rangle \frac{\nu}{\mu} = \langle S' | S' \rangle + \langle S' | C' \rangle \frac{\mu}{\nu} \quad (10)$$

如果考虑如下替换^[5]

$$\left. \begin{aligned}
\langle C' | S' \rangle &= |\langle C' | S' \rangle| \exp(i\phi), \\
\chi &= \frac{1}{2 |\langle C' | S' \rangle|} (\langle C' | C' \rangle - \langle S' | S' \rangle), \\
\delta &= \sinh^{-1}(\chi), \quad \mu = \exp(\pm \delta/2) \exp(i\phi/2), \\
\nu &= \pm \exp(\mp \delta/2) \exp(-i\phi/2)
\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

则场约化密度算符的本征值和本征函数可写为

$$\lambda_f^\pm = \langle C' | C' \rangle \pm \exp(\mp \delta) |\langle C' | S' \rangle| = \langle S' | S' \rangle \pm \exp(\pm \delta) |\langle C' | S' \rangle| \quad (12)$$

$$|\psi_f^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_f^\pm \cosh(\delta)}} \left\{ \exp\left[\frac{1}{2}(i\phi \pm \delta)\right] |C'\rangle \pm \exp\left[-\frac{1}{2}(i\phi \pm \delta)\right] |S'\rangle \right\} \quad (13)$$

光场的熵可根据本征值 λ_f^\pm 写出^[5]

$$S_f(t) = - \{ \lambda_f^+ \ln \lambda_f^+ + \lambda_f^- \ln \lambda_f^- \} \quad (14)$$

从目前有关文献看^[5~7]，原子相干性对场熵演化的影响很少涉及。而由本文(9)、(11)、

(12)、(14)式确定的场熵包含了原子相干性对场熵演化的影响,其结果适合于依赖强度耦合 J-C 模型场熵计算的一般情况。

3 数值计算与结果讨论

由(9)、(11)、(12)、(14)式,选取 $n_c = 20$, 不同的原子分布角 θ 以及原子与场的相对位相 $\varphi - \beta$, 通过数值计算,展示场熵的演化规律,结果如图 1 所示。由此可以作如下讨论:

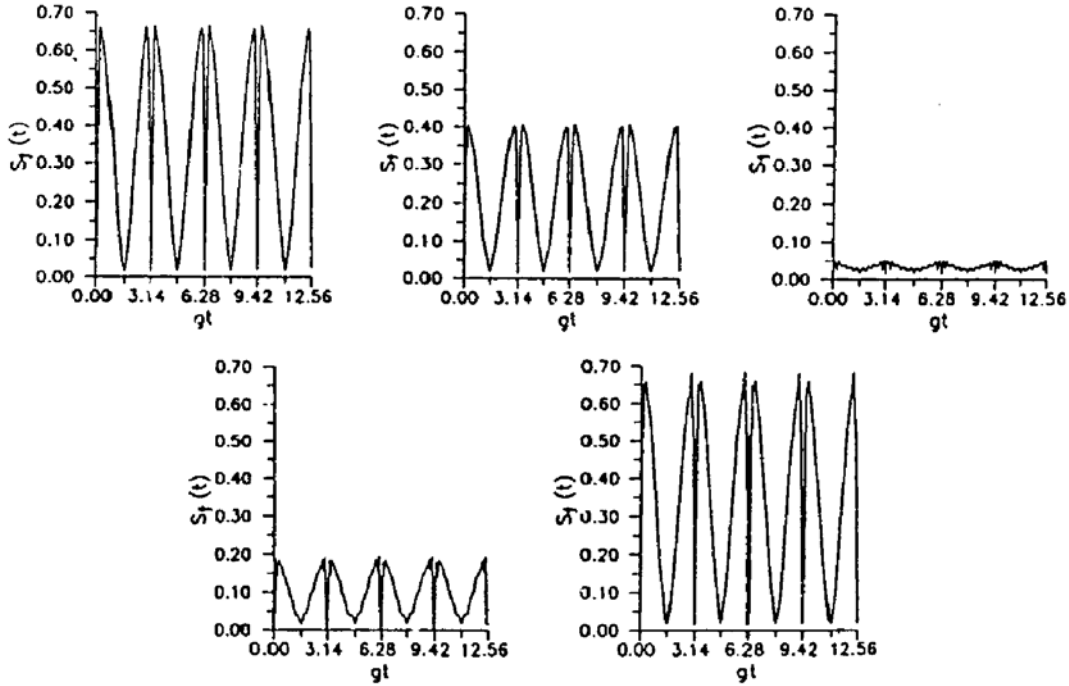


Fig. 1 Evolution of the field entropy $S_f(t)$ for $n_c = 20$,

- (a) $\theta = 0$ (or π), $\varphi - \beta = 0$; (b) $\theta = \pi/4$, $\varphi - \beta = 0$; (c) $\theta = \pi/2$, $\varphi - \beta = 0$;
(d) $\theta = \pi/2$, $\varphi - \beta = \pi/8$; (e) $\theta = \pi/2$, $\varphi - \beta = \pi/2$

3.1 场熵演化具有严格的周期性

从图 1 可见: 当 $t = n\pi/2g$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 时, 场熵演化到达最小, 场态返回初始纯态, 而在 $t = n\pi/g$ 的时域附近, 即原子反转回复区域附近(参照文献[2]图 1), 场熵从最大演化到最小, 又从最小演化到最大而剧烈变化。这说明: 原子反转的回复效应和光场与原子关联效应的剧烈变化有内在联系。从图 1(a)~(e)可知: 原子相干性并不影响场熵演化的周期性。同时把本文场熵演化的结果与文献[5, 6]中单光子 J-C 模型场熵演化的结果作比较可知, 两者的主要差别在于: 前者具有严格的演化周期性而后者则无这种周期性。

3.2 原子相干性对场熵演化的影响

3.2.1 原子分布角 θ 的影响

图 1(a)为原子初始处于非相干激发态(即 $\theta = 0$) 或基态(即 $\theta = \pi$) 时场熵呈现的演化行为。这表明: $\theta = 0$ 或 π 两种原子初始条件下对应的场熵演化规律相同。同时在 $\theta = 0$ 或 π 的条件下, 从(9)式可知: 场熵的参数 $\langle C' | C' \rangle$ 、 $\langle S' | S' \rangle$ 、 $|\langle C' | S' \rangle|$ 与 β 、 $\varphi - \beta$ 均无关。因此, 当原子处于非相干激发态或基态时, 场熵的演化独立于场的初始位相角 β 以及场与原子的相对位相 $\varphi - \beta$ 。图 1(b)~(e)为原子初始处于相干激发($\theta \neq 0$ 或 π) 态时的场熵演化。图 1(b)与图 1(c)为固定 $\varphi - \beta = 0$, θ 分别取 $\pi/4$ 与 $\pi/2$ 时的情况。可见, 在 $0 < \theta \leq \pi/2$ 范围内, 场熵

演化振幅随 θ 增加而减小。这说明：原子处于相干激发态时，原子与场的关联程度（场熵大小）与原子在能级间的初始分布有关。

3.2.2 场与原子相对位相的影响

图 1(c), (d), (e) 为固定 $\theta = \pi/2$, 相对位相 $\varphi - \beta$ 分别为 $0, \pi/8, \pi/2$ 时的场熵演化。可见：随着 $\varphi - \beta$ 的增加，场熵演化振幅增大。当 $\theta = \pi/2, \varphi - \beta = \pi/2$ 时，场熵的演化行为与原子处于非相干态的情况相同[图 1(a)]。这里值得提出的是：当 $\theta = \pi/2, \varphi - \beta = 0$ [图 1(c)] 时的原子初态

$$|\theta_c, \varphi_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + \exp(-i\varphi_c)|g\rangle) \quad (15)$$

为相干捕获态^[2]，从文献[4]可知：此处光场位相涨落以及光子数涨落不随时间变化，即光场与原子的相互作用不影响场的位相涨落与光子数涨落。而从本文图 1(c) 可见：在原子初态为相干捕获态时，场熵演化振幅显著减小，但仍随时间发展作周期性演化。这说明场熵比位相涨落与光子数涨落更敏感于原子与场的相互作用，因为场熵包含了光场约化密度矩阵的高阶统计矩^[5]。

参 考 文 献

- [1] B. Buck, C. V. Sukumar, Exactly soluble model of atom-photon coupling showing periodic decay and revival. *Phys. Lett. (A)*, 1981, **81**(2~3): 132~135
- [2] P. Zhou, Z. L. Hu, J. S. Peng, Effect of atomic coherence on the collapses and revivals in some generalized Jaynes-Cummings models. *J. Mod. Opt.*, 1992, **39**(1): 49~62
- [3] V. Buzek, Light squeezing in the Jaynes-Cummings with an intensity-dependent coupling. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(9): 1151~1162
- [4] 周 鹏, 彭金生, 李高翔, 依赖强度耦合 J-C 模型中场的位相特性. *光学学报*, 1993, **13**(5): 444~449
- [5] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight, Fluctuations and entropy in models of quantum optical resonance. *Ann. Phys. (N. Y.)*, 1988, **186**(2): 381~407
- [6] V. Buzek, H. Moya-Cessa, P. L. Knight, Schrödinger-cat states in the resonant Jaynes-Cummings: Collapse and revival of oscillations of the photon-number distribution. *Phys. Rev(A)*, 1992, **45**(11): 8190~8203
- [7] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight, Periodicity, phase and entropy in models of two-photon resonance. *J. Opt. Soc. Am(B)*, 1990, **7**(1): 116~124

Evolution of Field Entropy in the Intensity-Dependent Coupling J-C Model

Fang Maofa

(Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081)

(Received 16 August 1993; revised 19 October 1993)

Abstract The dynamical properties of the field entropy evolution in the intensity-dependent coupling J-C model are studied and the influence of atomic coherence on the evolution of the field entropy is examined.

Key words the evolution of the field entropy, atomic coherence.