

# 共振简并双光子激光近阈行为的理论研究\*

胡响明

(华中师范大学应用物理研究所, 武汉 430070)

**摘 要** 采用量子理论讨论共振简并双光子激光的小偏谐近阈行为。在一定条件下, 系统能够呈现无反转激光。在另一条件下, 系统则能够呈现无激光反转。

**关键词** 双光子激光, 小偏谐, 近阈, 无反转激光, 无激光反转。

近年来, 阶梯形三能级共振简并双光子激光的量子理论取得了较大的进展<sup>[1-4]</sup>。本文采用量子理论, 研究当归一化单光子失谐远小于 1 时, 对于两个适当的原子-场耦合常数, 共振简并双光子激光系统在近阈区域呈现无反转激光和无激光反转的特性。

## 1 运动方程

考虑阶梯形三能级原子与单模腔场发生相互作用的激光系统, 系统模型与文献[3, 4]相同\*\*。原子能级如图 1 所示。光场频率为  $\nu$ , 高能级  $|a'\rangle$  和低能级  $|c'\rangle$  具有相同的宇称, 高低能级与中间能级  $|b'\rangle$  的宇称则相反。能级  $|A'\rangle$  ( $A = a, b, c$ ) 的能量是  $\hbar\omega_A$ 。活性原子被非相干泵浦到激光能级, 泵浦速率为  $\gamma_a$ , 能级  $|a'\rangle$ ,  $|b'\rangle$  和  $|c'\rangle$  的初始布居几率分别为  $\rho_{aa}$ ,  $\rho_{bb}$  和  $\rho_{cc}$ 。原子能级的衰变常数相等, 设为  $\Gamma$ , 单光子偏谐量为  $\Delta = (\omega_a - \omega_b) - \nu = \nu - (\omega_b - \omega_c)$ 。在相互作用表象中, 原子与简并场发生相互作用的哈密顿量为

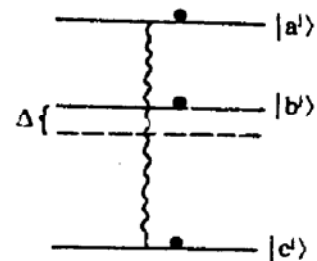


Fig. 1

$$V = g_1 a |a'\rangle \langle b'| + g_2 a |b'\rangle \langle c'| + H. C. \quad (1)$$

其中  $g_1$  和  $g_2$  分别是跃迁  $a - b$  和  $b - c$  的耦合常数, 这里考虑  $g_1 \neq g_2$  的情形,  $a(a^+)$  是场的湮灭(产生)算子。文献[1]也曾考虑  $g_1 \neq g_2$  的情形, 但那里只考虑高能级有原子布居数的情形。本文则考虑三个能级均有一定布居几率的情形。采用文献[3]或文献[1]的方式可以得到激

\* 华中师范大学自然科学基金资助的课题

\*\* 尽管文献[1]的系统模型与文献[3, 4]有点不同, 但对于本文的非相干抽运系统, 也可获得相同的运动方程。

收稿日期: 1994 年 1 月 2 日

光场的约化密度矩阵对角元  $P(n)$  的运动方程

$$\begin{aligned} \dot{P}(n) = & -\frac{(n+1)[A_1P(n) - A_1'P(n+1)]}{[1 + \delta^2 + \lambda_1(n+1) + \lambda_2(n+2)]} + \frac{n[A_1P(n-1) - A_1'P(n)]}{[1 + \delta^2 + \lambda_1n + \lambda_2(n+1)]} \\ & -\frac{(n+1)[A_2P(n) - A_2'P(n+1)]}{[1 + \delta^2 + \lambda_1n + \lambda_2(n+1)]} + \frac{n[A_2P(n-1) - A_2'P(n)]}{[1 + \delta^2 + \lambda_1(n-1) + \lambda_2n]} \\ & -\frac{(3/4)(n+1)(n+2)[1 + \delta^2/3 + \lambda_1(n+1)/4 + \lambda_2(n+2)/4]}{[1 + \delta^2 + \lambda_1(n+1) + \lambda_2(n+2)][(1 + \lambda_1(n+1)/4 + \lambda_2(n+2)/4)^2 + \delta^2]} \\ & \cdot [A_1\lambda_2P(n) - A_2\lambda_1P(n+2)] \\ & + \frac{(3/4)(n-1)n[1 + \delta^2/3 + \lambda_1(n-1)/4 + \lambda_2n/4][A_1\lambda_2P(n-2) - A_2\lambda_1P(n)]}{[1 + \delta^2 + \lambda_1(n-1) + \lambda_2n][(1 + \lambda_1(n-1)/4 + \lambda_2n/4)^2 + \delta^2]} \\ & - CnP(n) + C(n+1)P(n+1) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} A_1 &= (2\gamma_a/\Gamma^2) |g_1|^2 \rho_{aa}, & A_1' &= (2\gamma_a/\Gamma^2) |g_1|^2 \rho_{bb}, & \lambda_1 &= (4|g_1|^2/\Gamma^2), & \delta &= \Delta/\Gamma \\ A_2 &= (2\gamma_a/\Gamma^2) |g_2|^2 \rho_{cc}, & A_2' &= (2\gamma_a/\Gamma^2) |g_2|^2 \rho_{bb}, & \lambda_2 &= (4|g_2|^2/\Gamma^2), & C &= \nu/Q \end{aligned} \right\} (2)$$

式中  $Q$  为腔损系数。从(2)式容易看出, 当  $g_1 = 0$ , 系统则只有  $b - c$  单光子过程<sup>[5]</sup>, 当  $g_2 = 0$ , 系统则只有  $a - b$  单光子过程<sup>[5]</sup>, 当  $g_1 \neq 0, g_2 \neq 0$ , 不仅具有  $a - b$  和  $b - c$  两个单光子过程, 还有  $a - c$  双光子过程。当  $g_1 = g_2$ , 则是文献[4]的情形。本文着重考虑  $g_1 \neq g_2 \neq 0$  的情形。

## 2 无反转激光和无激光反转

双光子激光的过程由  $a - b$  和  $b - c$  两个单光子过程和  $a - c$  双光子过程构成, 到目前为止, 还不曾有人对这类双光子激光的“反转”给出确切的定义。人们或者只考虑高能级  $a$  具有布居几率的情形<sup>[1,2]</sup>。此时不涉及低能级  $c$  的布居几率的贡献; 或者只考虑两个单光子过程耦合常数相等的情形<sup>[3,4]</sup>,  $g_1 = g_2$ , 此时中间能级的布居几率对激光增益没有贡献。

究竟是否要求两个单光子过程和双光子过程同时实现了反转, 即  $\rho_{aa} > \rho_{bb} > \rho_{cc}$ , 才是双光子激光系统的“反转”的含义呢? 不妨分析一下。如果  $\delta^2 \gg |g_i/\gamma|^2 n \gg 1$ , ( $i = 1, 2$ ), 那么, 系统中只有  $a - c$  双光子过程起主要作用, 两个单光子过程的贡献很微小, 完全可以忽略。因此, 即使两个单光子过程中有任一个未实现反转,  $\rho_{aa} < \rho_{bb}$  或  $\rho_{bb} < \rho_{cc}$ , 只要双光子过程实现了反转,  $\rho_{aa} > \rho_{cc}$ , 此时, 与  $\rho_{aa} > \rho_{bb} > \rho_{cc}$  描述的情形相比较, 只要两种情形下  $\rho_{aa} - \rho_{cc}$  的值相等, 那么双光子激光的状况就相同, 从这个意义上来说, 反转的意义只要  $\rho_{aa} > \rho_{cc}$  的情形就足够了。

本文考虑到人们通常关于反转的含义: 高能级布居几率大于低能级布居几率, 对于双光子激光情形, 尽管相对于高能级  $a$  而言, 中间能级  $b$  是低能级, 但相对于低能级  $c$  而言, 它毕竟还是高能级, 因此, 本文采用一种更加严格的反转含义: 相对低能级  $c$  而言, 高能级  $a$  和中间能级  $b$  的布居几率之和大于低能级  $c$  的布居几率, 即  $\rho_{aa} + \rho_{bb} > \rho_{cc}$ 。

当归一化单光子失谐量  $\delta \ll 1$  时, 在近阈区域, 下述近似是很好的

$$\lambda_i n \ll 1, \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

下面的讨论中考虑(2)式的四级近似<sup>[5]</sup>, 即将(2)式中的分母展开至  $|g_i a|^2$ , ( $i, j = 1, 2$ ), 但

对于  $\delta$ , 可以保留原来的形式。考虑平均光子数  $\langle n(t) \rangle = \sum_n n P(n)$ , 通过上述处理, 忽略光子数的关联, 即取  $\langle n^2 \rangle = \langle n \rangle^2$ , 最后得到光子数的运动方程

$$\langle \dot{n} \rangle = G \langle n \rangle + z \quad (4)$$

式中  $G$  为增益系数,  $z$  代表  $|a'\rangle$  和  $|b'\rangle$  能级自发辐射的贡献<sup>[5]</sup>, 其具体形式为

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{A_1 - A_1' + A_2 - A_2'}{1 + \delta^2} - \frac{A_1 - A_1' + A_2 - A_2'}{(1 + \delta^2)^2} (\lambda_1 + \lambda_2) \langle n \rangle \\ &\quad + \frac{1 + \delta^2/3}{(1 + \delta^2)^2} \frac{3}{2} (A_1 \lambda_2 - A_2 \lambda_1) \langle n \rangle - C, \\ z &= A_1 + A_2' \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

从方程(5)可知, 激光的线性增益系数为

$$G_l = (A_1 - A_1' + A_2 - A_2') / (1 + \delta^2) \quad (6)$$

分两种情形来考虑。

1)  $\rho_{bb} = 0$  的情形

(6)式线性增益为

$$G_l = \frac{2\gamma_a}{\Gamma^2 + \Delta^2} (|g_1|^2 \rho_{aa} - |g_2|^2 \rho_{cc}) - C \quad (7)$$

即使原子初始布居没有实现反转,  $\rho_{aa} < \rho_{cc}$ , 但是, 如果选择  $g_1$  和  $g_2$  满足

$$|g_1|^2 > \frac{\rho_{cc}}{\rho_{aa}} |g_2|^2 + \frac{C(\Gamma^2 + \Delta^2)}{2\gamma_a \rho_{aa}} \quad (8)$$

那么, 线性增益  $G_l > 0$ , 系统呈现无反转激光。然而, 即使原子初始布居实现了反转,  $\rho_{aa} > \rho_{cc}$ , 如果选择  $g_1$  和  $g_2$  满足

$$|g_1|^2 < \frac{\rho_{cc}}{\rho_{aa}} |g_2|^2 \quad (9)$$

那么, 线性增益  $G_l < 0$ , 系统呈现无激光反转。

2)  $\rho_{bb} \neq 0$  的情形

(6)式线性增益写为

$$G_l = \frac{2\gamma_a}{\Gamma^2 + \Delta^2} [|g_1|^2 \rho_{aa} - |g_1|^2 \rho_{bb} + |g_2|^2 \rho_{bb} - |g_2|^2 \rho_{cc}] - C \quad (10)$$

即使原子初始布居没有实现反转,  $\rho_{aa} + \rho_{bb} < \rho_{cc}$ , 但是, 如果  $\rho_{aa} > \rho_{bb}$ , 选择  $g_1$  和  $g_2$  满足

$$|g_1|^2 > \frac{\rho_{cc} - \rho_{bb}}{\rho_{aa} - \rho_{bb}} |g_2|^2 + \frac{C(\Gamma^2 + \Delta^2)}{2\gamma_a(\rho_{aa} - \rho_{bb})} \quad (11)$$

那么, 线性增益  $G_l > 0$ , 系统呈现无反转激光。然而, 即使原子初始布居实现了反转,  $\rho_{aa} + \rho_{bb} > \rho_{cc}$ , ① 当  $\rho_{aa} < \rho_{bb} < \rho_{cc}$ , 无论  $g_1$  和  $g_2$  取什么值, 总有  $G_l < 0$ ; ② 当  $\rho_{aa} > \rho_{bb}$ ,  $\rho_{cc} > \rho_{bb}$ , 选择  $g_1$  和  $g_2$  满足

$$|g_1|^2 < \frac{\rho_{cc} - \rho_{bb}}{\rho_{aa} - \rho_{bb}} |g_2|^2 \quad (12)$$

此时,  $G_l < 0$ ; ③ 当  $\rho_{aa} < \rho_{bb}$ ,  $\rho_{cc} < \rho_{bb}$ , 选择  $g_1$  和  $g_2$  满足

$$|g_1|^2 > \frac{\rho_{bb} - \rho_{cc}}{\rho_{bb} - \rho_{aa}} |g_2|^2 \quad (13)$$

仍然有  $G_i < 0$ , 总之, 上述三种情况都不能产生激光, 系统呈现无激光反转。

前述小偏谐近阈运行的无反转激光以及反转激光的稳态平均光子数由  $\langle \dot{n} \rangle = 0$  和  $\partial \langle \dot{n} \rangle / \partial \langle n \rangle < 0$  决定, 得到稳态平均光子数为

$$\langle n \rangle_{ss} = \frac{A_1 - A'_1 + A'_2 - A_2 - C(1 + \delta^2)](1 + \delta^2)}{(A_1 - A'_1 + A'_2 - A_2)(\lambda_1 + \lambda_2) - (3/2 + \delta^2/2)(A_1\lambda_2 - A_2\lambda_1)} \quad (14)$$

其物理意义解释如下: 在  $\delta \ll 1$  时, 系统中的两个单光子过程起主要作用。但是, 从(5)式看出, 即使  $\delta = 0$ , 双光子过程总是存在。两个单光子过程起主要作用及系统的稳态条件要求

$$(A_1 - A'_1 + A'_2 - A_2)(\lambda_1 + \lambda_2) > (3/2 + \delta^2/2)(A_1\lambda_2 - A_2\lambda_1) \quad (15)$$

其含义是, 双光子过程作用的大小不能超过两个单光子过程饱和作用的大小。否则, 双光子过程将起主要作用。对于两个单光子过程起主要作用的情形, 从线性增益(10)可以解释上述无反转激光和无激光反转的物理意义。(10)式中正比于  $\rho_{aa} - \rho_{bb}$  的项代表  $a - b$  单光子过程的贡献, 正比于  $\rho_{bb} - \rho_{cc}$  的项代表  $b - c$  单光子过程的贡献。两个单光子过程对线性增益的贡献不一定相同, 贡献的大小和正负既取决于相应的原子能级布居数之差, 又取决于原子一场耦合常数。一方面, 在没有反转的条件下, 只要选择适当的耦合常数, 保证  $a - b$  过程仍然作正贡献, 而且这个正贡献的大小超出  $b - c$  过程的负贡献的大小, 系统就呈现无反转激光。另一方面, 在已有反转的条件下, 如果两个单光子过程分别却没有反转, 或者一个单光子过程有反转作正贡献, 而另一个单光子过程没有反转作负贡献, 由于两个耦合常数不同, 只要正贡献不敌负贡献, 系统总无法产生激光, 呈现无激光反转。

### 参 考 文 献

- [1] S. Y. Zhu, X. S. Li, Quantum theory of a two-photon laser. *Phys. Rev. (A)*, 1987, **36**(8): 3889~3896
- [2] A. W. Boone, S. Swain, Theory of the degenerate two-photon laser. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **41**(1): 343~351
- [3] N. Lu, S. Y. Zhu, Quantum theory of the two-photon correlated-spontaneous-emission lasers; Exact atom-field interaction Hamiltonian. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **40**(10): 5735~5752
- [4] N. Lu, Q-function approach to a two-photon laser. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **42**(11): 6756~6766
- [5] M. Sargent III, M. O. Scully, W. E. Lamb Jr., *Laser Physics*. 1974: Addison-Wesley, Reading, MA, Chapter 17

## Theoretical Study on Operation Near Threshold of Resonant Degenerate Two-Photon Lasers

Hu Xiangming

(Institute of Applied Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

(Received 2 January 1994)

**Abstract** Operation near threshold of resonant degenerate two-photon lasers with small detuning is studied via quantum theory. Lasing without inversion can occur certain conditions. Inversion without lasing can also occur when the conditions are changed.

**Key words** two-photon lasers, small detunings, near-threshold, lasing without inversion, inversion without lasing.