

# 位相畸变光束的聚焦特性与光束质量\*

钱列加 张筑虹 朱宝强 詹庭宇 范滇元

(中国科学院上海光学机械精密研究所, 上海 201800)

**摘 要** 针对高斯型随机位相畸变, 应用夫琅和费(Fraunhofer)衍射积分研究了畸变光束的聚焦特性和光束质量  $M^2$  因子, 给出了它们随位相畸变特征量变化的近似分析和数值计算结果, 可为高功率激光器的设计提供理论依据。

**关键词** 高斯随机变量, 斯特列尔比, 光束质量。

## 1 引 言

光束质量是高功率激光系统的关键参数之一, 而光束位相的畸变是影响光束质量的主要因素。Holmes 等提出的光学系统的近似模型<sup>[1]</sup>, 将光束的位相畸变(光学系统的波像差)与远场轴上光强(斯特列尔比  $SR$ <sup>[2]</sup>)相联系起来。然而, 从本质上讲, 因为光束的位相畸变具有随机性, 应该用统计光学的方法处理这类问题<sup>[3]</sup>, 在高功率激光器中, 可用高斯型随机变量来描述位相畸变<sup>[4]</sup>。本文针对高斯型随机位相畸变, 在理论上研究光束的远场聚焦特性  $SR$  和光束质量  $M^2$  因子<sup>[5]</sup>, 以期明了位相畸变对  $M^2$  因子和  $SR$  的影响程度, 可为高功率激光器的设计提供依据。

## 2 理论分析

对光束远场聚焦特性的描述, 可以用夫琅和费衍射积分来处理, 考虑入射初始光波具有如下形式:

$$U_i(x, y) = A_0 \exp[-(x^2 + y^2)/w_1^2] \exp[i\Phi(x, y)] \quad (1)$$

这里假定光强分布为高斯型,  $w_1$  为光斑尺寸, 而  $\Phi(x, y)$  为点  $(x, y)$  处的位相畸变。远场光波分布  $U_0(x_0, y_0)$  则可表示为:

$$U_0(x_0, y_0) = \frac{A_0}{\lambda f} \iint \exp[-(x_1^2 + y_1^2)/w_1^2] \exp[+i\Phi(x_1, y_1)] \\ \times \exp\left\{-\frac{ik}{f}(x_0x_1 + y_0y_1)\right\} dx_1 dy_1 \quad (2)$$

式中  $\lambda$  为激光波长,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $f$  为透镜焦距。而光波强度  $I(x_0, y_0) = U_0(x_0, y_0)U_0^*(x_0, y_0)$ , 在

\* 中国科学院重大项目“神光 I”研制经费资助课题和国家自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1994年1月7日; 收到修改稿日期: 1994年2月23日

统计问题中, 实际感兴趣的应该是  $I(x_0, y_0)$  的系综平均值  $\langle I(x_0, y_0) \rangle$ 。按照文献[4], 高斯随机位相畸变  $\Phi(x, y)$  可被假定为各态历遍的且空间各向同性, 而且其平均值为零。这样, 系综平均值  $\langle I(x_0, y_0) \rangle$  则可表示为:

$$\langle I(x_0, y_0) \rangle = \frac{A_0^2}{\lambda^2 f^2} \iiint \exp[-(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)/w_1^2] \exp[-\sigma_\Phi^2 + c_\Phi(u)] \times \exp\{- (ik/f)[x_0(x_1 - x_2) + y_0(y_1 - y_2)]\} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2. \quad (3)$$

式中  $u = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}$ ,  $c_\Phi = \langle \Phi(x_1, y_1)\Phi(x_2, y_2) \rangle$  是随机变量  $\Phi(x, y)$  的自相关函数, 对于平均值为零的随机变量  $\Phi(x, y)$ ,  $c_\Phi = \sigma_\Phi^2 \exp\{-[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]/2l_0^2\}$  [5], 由特征量方均值  $\sigma_\Phi^2$  和表征空间相干性的相干尺度  $l_0$  唯一确定。(3)式在极坐标系中可被写成:

$$\langle I(r_0) \rangle = \frac{\pi(w_1 A_0)^2}{\lambda^2 f^2} \exp(-\sigma_\Phi^2) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2w_1^2}\right) \exp[\sigma_\Phi^2 e^{-r^2/2l_0^2}] J_0\left(\frac{kr r_0}{f}\right) r dr \quad (4)$$

(4)式给出了位相畸变高斯光束的远场光强分布, 由此可以方便地推导斯特列尔比  $SR$  和光束质量  $M^2$  因子:

$$SR = \frac{\langle I(0) \rangle|_{\sigma_\Phi \neq 0}}{\langle I(0) \rangle|_{\sigma_\Phi = 0}} = \frac{\exp(-\sigma_\Phi^2)}{w_1^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2w_1^2}\right) \exp(\sigma_\Phi^2 e^{-r^2/2l_0^2}) r dr \quad (5)$$

$$M^4 = \left(\frac{2\pi w_1}{\lambda f}\right)^2 \frac{\int_0^\infty \langle I(r_0) \rangle r_0^3 dr_0}{\int_0^\infty \langle I(r_0) \rangle r_0 dr_0} \quad (6)$$

如畸变量  $\sigma_\Phi^2 \ll 1$ , (4)式中的  $\exp[\sigma_\Phi^2 \exp(-\frac{r^2}{2l_0^2})] \simeq 1 + \sigma_\Phi^2 \exp(-\frac{r^2}{2l_0^2})$ , (4)式可被近似成:

$$\langle I(r_0) \rangle \simeq [\exp(-\sigma_\Phi^2)] \cdot [I_0 \exp(-2r_0^2/w_1^2) + I_0' \exp(-2r_0^2/w^2)] \quad (7)$$

其中  $I_0 = \frac{\pi w_1^4 A_0^2}{\lambda^2 f^2}$ ,  $w_f = \frac{\lambda f}{\pi w_1}$ ,  $I_0' = I_0 \frac{\sigma_\Phi^2 l_0^2}{w_1^2 + l_0^2}$ ,  $w = w_f(l_0^2 + w_1^2)^{1/2}/l_0$ 。除一衰减因子  $\exp(-\sigma_\Phi^2)$  外, (7)式中第一项对应无位相畸变的远场光强分布, 而第二项则是由位相畸变引起的散射光分布。因通常情况下  $l_0 \ll w_1$ , 因此,  $w \gg w_f$ ,  $I_0' \ll I_0$ , 散射光束相当于峰值功率很低但束宽很大的一个本底噪音, 对(4)式进行严格的数值计算也证实了这一点, 典型的远场光强分布如图 1 所示。这样, (5)、(6)式可被近似成:

$$SR \simeq e^{-\sigma_\Phi^2} \simeq 1 - \sigma_\Phi^2 \quad (8)$$

$$M^2 \simeq (1 + \sigma_\Phi^2)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\sigma_\Phi^2 \quad (9)$$

(8)、(9)式是在畸变量  $\sigma_\Phi^2 \ll 1$  时的结论, 如有  $\lambda/10$  的位相畸变, 对应  $\sigma_\Phi^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{10}\right)^2 \simeq 0.4$ , 近似的误差在 10% 左右, 此时  $SR$  相应地有 40% 的下降, 而  $M^2$  增大了 20%。按照(8)、(9)式,

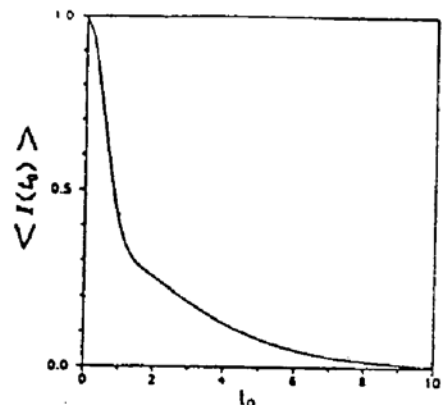


Fig. 1 Typical far-field intensity distribution of aberrated beam with  $\sigma_\Phi^2 = 3$  and  $a = 0.25$

$SR$  和  $M^2$  主要由畸变量  $\sigma_0^2$  决定。(8) 式和对应均幅平面波时的  $SR$  完全一样<sup>[2]</sup>, 它是文献[1]光学系统近似模型建立的基础, 可被用于分析高功率光学系统的各种特性如何影响可得到的最大远场轴上光强, 在那里对于确定性的波像差,  $SR$  的计算需要知道位相畸变的具体细节, 文献[1]只能采用唯象近似方法处理。而对于高斯型随机位相畸变, 则完全由特征量  $\sigma_0^2$  和  $l_0$  决定畸变的细节, 可以得到经过严格理论处理的近似解析表示式(8)。

### 3 数值计算结果和讨论

至此, 已完成了对高斯型随机位相畸变光束  $SR$  和  $M^2$  因子的理论分析, 在畸变足够小时, 可以得到其近似解析表示。对一般的位相畸变量, (5)、(6) 式须数值计算。为计算方便, 对坐标变量  $r, r_0$  进行无量纲变换:  $t = r/l_0, t_0 = r_0/w_1$ , 而  $a = l_0/w_1$ , 则:

$$\langle I(t_0) \rangle = I_0 a^2 \exp(-\sigma_0^2) \int_0^\infty \exp(-\frac{1}{2}a^2 t^2) \exp(\sigma_0^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}) J_0(2att_0) t dt \quad (10)$$

$$SR = a^2 \exp(-\sigma_0^2) \int_0^\infty \exp(-\frac{1}{2}a^2 t^2) \exp(\sigma_0^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}) t dt \quad (11)$$

$$M^2 = \left[ \frac{2 \iint e^{-\frac{1}{2}t^2 t_0^2} \exp(\sigma_0^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}) J_0(2att_0) t t_0 dt dt_0}{\iint e^{-\frac{1}{2}t^2 t_0^2} \exp(\sigma_0^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}) J_0(2att_0) t t_0 dt dt_0} \right]^{1/2} \quad (12)$$

式(10)~(12)是进行数值计算分析的基础。计算中在保证精度的同时, 为节省时间, 对高斯分布, 积分空间取光斑大小的 4 倍, 而取样点的密度取提高 2 倍密度不明显影响计算结果时的最小取样点数。图 2 和图 3 是  $M^2$  因子和  $SR$  分别随畸变量  $\sigma_0^2$  和空间相干尺度  $l_0$  的变化关系, 图中虚线对应  $M^2$  因子, 而实线则对应  $SR$ 。

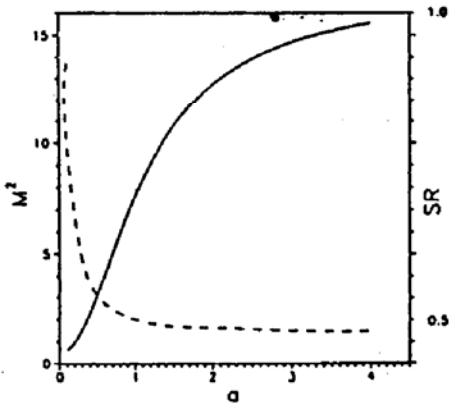


Fig. 2 Calculated beam quality  $M^2$  and Strehl ratio  $SR$  vs spatial coherent dimension  $l_0/w_1$  when  $\sigma_0^2 = 0.8$

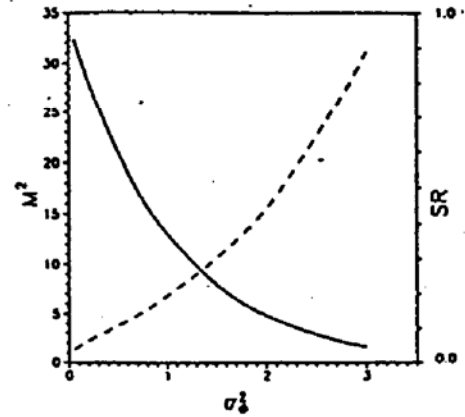


Fig. 3 Calculated beam quality  $M^2$  and Strehl ratio  $SR$  vs phase variation  $\sigma_0^2$  when  $l_0/w_1 = 0.25$

分析表明: 1)  $M^2$  和  $SR$  都与  $\sigma_0^2$  和  $l_0$  有关, 正象从物理意义上可直接理解的那样, 畸变量  $\sigma_0^2$  的增大和相干尺度  $l_0$  的减小, 会分别导致  $M^2$  的增大和  $SR$  的降低。

2) 如  $l_0 \gg w_1$ ,  $M^2$  和  $SR$  都将趋于 1。其物理意义是当光束具有很好的相干性时, 畸变光束与理想高斯光束完全等价。从  $M^2$  和  $SR$  随  $l_0$  增大的变化趋势上看, 相对而言,  $M^2$  较为敏感。

3) 如  $l_0 \ll w_1$ , 近似表示式(8)的精度相当高, 如  $\sigma_0^2 \leq 0.1$ , 其精度在 10% 以内。而  $M^2 \gg 1 + \sigma_0^2/2$ , (9) 式的近似程度非常差, 只有在  $l_0$  较大( $a$  为 4 左右)时, 其近似才成立。因此, (8)

式给出了  $SR$  的下限, 而(9)式也给出了  $M^2$  因子的下限, 这与带权重因子的统计平均的  $M^2$  定义有关。

4) 在空间相干性不太好时,  $M^2$  和  $SR$  都随畸变量  $\sigma_0^2$  的增大而急剧变差。

5) 相对而言, 作为光束传输不变量的  $M^2$  因子其物理内涵较为丰富, 随  $\sigma_0^2$  及  $l_0$  的变化程度相对灵敏, 而  $SR$  和空间相干尺度  $l_0$  等描述光束质量则相对不敏感或不够全面, 但  $SR$  也是描述光束的重要物理量, 体现了激光束远场的可聚焦程度。

**结 论** 本文针对高斯型随机位相畸变, 研究了畸变光束的远场聚焦特性  $SR$  和光束质量  $M^2$  因子。与确定性位相畸变不同, 对高斯型随机畸变其具体细节完全由特征量  $\sigma_0^2$  和  $l_0$  决定, 这为本文的分析特别是将来对高功率激光器件的设计带来方便。为近似分析方便起见, 本文只考虑了高斯型光强分布, 对于一般的光强分布则同样可以按照本文的处理方法进行数值计算。

### 参 考 文 献

- [1] D. A. Holmes, P. V. Avizonis, Approximate Optical System Model. *Appl. Opt.*, 1975, 15(4): 1075~1082
- [2] M. 玻恩, E. 沃耳尔, 光学原理(下册), 科学出版社, 北京, 1978: 604~610
- [3] J. W. 顾德门, 统计光学, 科学出版社, 北京, 1992: 338~344
- [4] K. R. Manes, W. W. Simmons, Statistical optics applied to high power glass lasers. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1985, 2(4): 528~538
- [5] A. E. Siegman, New developments in laser resonators. *Proc. SPIE*, 1990, 1224: 2~14

## Focusing Characteristics and Beam Quality of Phase Aberrated Beam

Qian Liejia      Zhang Zhuhong      Zhu Baoqiang  
Zhan Tingyu      Fan Dianyuan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

(Received 7 January 1994; revised 23 February 1994)

**Abstract** Based on Fraunhofer diffraction integration, we have developed a theory on focusing characteristics and beam quality of aberrated beam of which the phase aberration is assumed to be a Gaussian random variable. Both approximate and calculated results have been presented. It is applicable in designs of high power lasers.

**Key words** Gaussian random variable, strehl ration, beam quality