

用反向调制照明法分析光栅成像效应

张海联

(昆明物理研究所, 昆明 650223)

顾去吾

(华东工业大学仪表分院, 上海 200093)

摘 要 提出了用反向调制照明法分析光栅成像效应的观点, 研究了光栅系统的反向衍射干涉效应, 成功地揭示了泰伯(Talbot)效应与劳(Lau)效应的内在联系, 并在白光双光栅衍射干涉的“消色效应”的基础上获得了白光扩展光源照明下的白光光栅成像效应和具有实用意义的四光栅干涉系统。

关键词 光栅成像, 劳效应, 消色差条纹, 调制。

1 引 言

有关泰伯效应^[1]与劳效应^[2]的解释与应用的文章很多, 但是对于泰伯效应与劳效应之间关系的分析却不多见^[3, 10]。本文提出了用反向调制照明的观点, 研究系统的反向衍射效应, 作为具体运用不仅成功地揭示了泰伯效应和劳效应之间的关系, 而且推广到双高密光栅的白光衍射干涉的消色效应^[4], 获得了白光光栅成像效应, 进而扩展为四光栅白光干涉系统。由此可见反向调制照明法作为光栅衍射干涉系统的一种独立的分析方法有着十分积极的意义。

2 反向调制照明法

如图 1 所示, 在 (x_0, y_0) 平面上由点光源 S 发出的球面波从左至右照明一个光学系统 F 后, 在平面 P 上产生干涉条纹, 设条纹周期为 T 。另外要求 F 具有某种对称性, 即若将 F 翻转 180° , 使其入射面和出射面与原来相反, 而在 P 面亦产生同类型的干涉条纹。易知光栅系统就具有这种对称性。设 O 点是两光束 A 、 B (多光束的分析类似, 这里以两光束为例) 的零程差点为干涉亮纹。 O_1 是其相邻的一条亮纹, 即到 O_1 的两相干光束 A_1 、 B_1 的程差为 λ 。若此时从 O 点反向发出球面波照明 F 系统, 由 F 对称性可知, 将在 S 点所在平面 (x_0, y_0) 产生干涉条

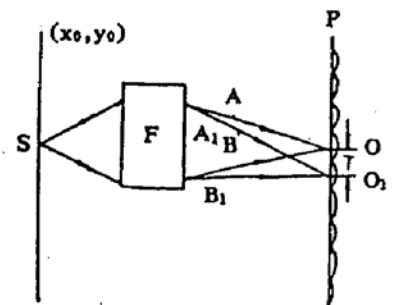


Fig. 1 Diagram of two beams interference. F stands for a beam-split system

纹, 周期设为 T' , 如图 2 所示, 且可知 S 点将是一条亮纹。同样若再由 O_2 发出与 O 不相干的球面波, 由于 O_2 只相对于 O 平移了 T 位移, 故 O_2 所形成的干涉图样与 O 形成的干涉图样周期相同为 T' , 只不过有一个 Δ 平移。同样, 对于 O_2 来说, S 点是相干光程差为 λ 的点, 故亦是亮纹, 可见 O 与 O_2 的两个干涉图样有一条亮纹重合, 加上其周期相同, 故干涉图样是重合的, 即在 P 平面上不相干点源 O 、 O_2 有 T 的平移, 则在原光源面上将有 $\Delta = T'$ 的图样平移。以上过程不难推广到 P 平面的其它亮纹, 故可以得出结论, 若在 P 平面置入与原干涉条纹周期 T 相同的黑白光栅, 作为光源调制光栅, 然后用扩展非相干光源照明, 则在原光源面 (x_0, y_0) 上可得到高对比的干涉条纹, 条纹周期 T' 与调制光栅其中一条缝光源在 (x_0, y_0) 面上形成的干涉条纹周期相同。此时可将 T' 的干涉条纹看成是 T 周期调制光栅经 F 系统所成的像。

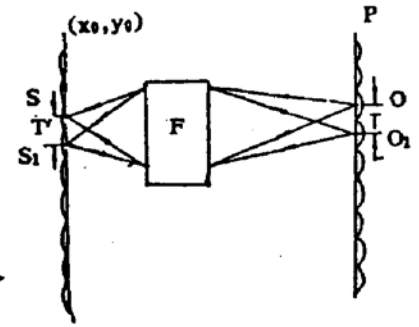


Fig. 2 Diagram of backward illuminating modulation

3 泰伯效应与劳效应的内在联系

若 F 系统是一块分波前的朗奇(Ronchi)光栅, 根据反向调制照明法, 将可由泰伯公式推出劳效应公式, 并充分显示出泰伯效应与劳效应的内在联系。如图 3 所示, 点光源 S 照明周期为 T_2 的朗奇光栅 G_2 (G_2 即相对应前面所述的 F 系统), G_2 为其扩大了自成像, 周期设为 T_1 。 S 到 G_2 的距离为 Z , G_2 到自成像 G_1 的距离为 Z_0 。由发散球面波照明光栅的自成像公式^[3]

$$Z_0 Z / (Z_0 + Z) = \alpha T_2^2 / \lambda, \quad T_1 = (1 + Z_0 / Z) T_2, \quad \alpha = +1, +2, \dots \quad (1)$$

可解出 Z_0, Z 得

$$Z_0 = \alpha T_1 T_2 / \lambda, \quad Z = Z_0 T_2 / (T_1 - T_2) \quad (2)$$

若在自成像面置入 T_1 周期的黑白光栅 G_1 , 扩展光源从右向左照明, 则在原光源面 (x_0, y_0) 上将得到高对比的干涉条纹, 周期为 T' 如图 4 所示。 T' 可这样确定, 在 G_2 栅面上任意选一条缝, 比如 O , 由 O 发出的球面波(将 O 看成点源不会影响干涉条纹周期的大小)照明 G_2 , 在 (x_0, y_0) 面产生的自成像周期就是 T' 。

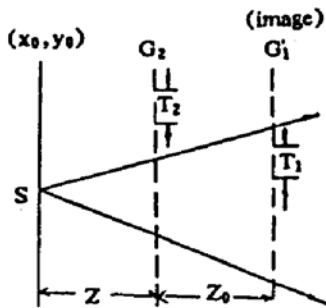


Fig. 3 Diagram of Talbot effect backlit by source point

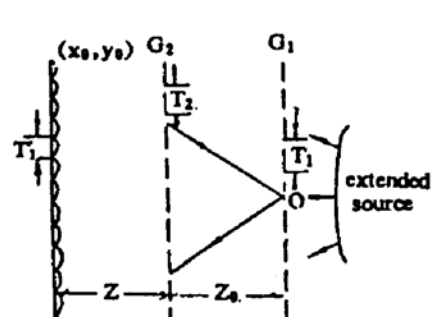


Fig. 4 General Lau effect obtained from Talbot effect by backward illuminating modulation

首先观察在这种情形下 (x_0, y_0) 面能否出现干涉条纹(自成像)。为此, 用自成像公式(1)验证, 此时 Z_0 与 Z 的意义置换, 可见(1)式仍成立, 就是说点源 O 照明 G_2 , 而原 (x_0, y_0) 面正是自成像面, 其周期 T' 由于反向照明, 故 Z_0 与 Z 的意义应相互置换得

$$T' = (1 + Z / Z_0) T_2 \quad (3)$$

将(2)式代入(3)式得

$$T' = T_1 T_2 / (T_1 - T_2) \quad (4)$$

以上结论说明,如图4所示,若用扩展光源照明两光栅 G_1 、 G_2 ,其中 G_1 周期为 T_1 , G_2 的周期为 T_2 ,则当 G_1 、 G_2 的距离为 Z_0 时,在距 G_2 为 Z 的平面上能观察到干涉条纹,周期为 T' 。其中 Z_0 、 Z 、 T' 分别由(2)式和(4)式确定。这三个公式正是广义劳效应的公式^[3]。

结合图3与图4,还可以直观地看到劳效应的有关特点。 G_1 是自成像,是由亮暗条纹构成。 G_2 若是位相光栅亦能产生亮暗条纹的光栅像 G_1' ,所以在劳效应中调制光栅 G_1 一定要是黑白光栅,而 G_2 可以是黑白光栅或位相光栅。另外,在发散点源照明下, G_1 自成像的周期 T_1 一定大于光栅周期 T_2 ,所以在劳效应中只有 $T_1 > T_2$,才能不用透镜直接观到实像干涉条纹。若 $T_1 < T_2$,对自成像来说是用会聚球面波照明 G_2 ,则反向照明时将得不到实像干涉条纹。

下面对使用相同周期光栅对的经典劳效应进行相类似的分析。

如图5所示, S 点源置于透镜焦点,球面波经透镜(焦距 f)后成平行光照明 G_2 ,设 G_2 的周期为 T 。则由泰伯公式^[5,6]可知在后场距 G_2 为 $Z_0 = \alpha T^2 / \lambda$, $\alpha = 1, 2, \dots$ 时出现与光栅同周期的精确自成像,又称傅里叶像(当 α 为奇数时是负自成像, α 为偶数时是正自成像)。除了上述严格的自成像面外,在一定的衍射距离即当 $Z_0 = \alpha T^2 / \beta \lambda$, α, β 为正整数时也能产生光栅形状,称之为菲涅尔(Fresnel)像,其周期为 T/β 。显然若在精确自成像面置入周期为 T 的光栅 G_1 ,再用扩展光源反向照明,则在原光源面即透镜焦面上将出现干涉条纹,周期设为 T'' ,这一点与上面对扩展劳效应的分析类似。若在菲涅尔像面上置入周期为 T 的光栅 G_1 ,如图6所示,由于 T 是菲涅尔像的周期 T/β 的 β 倍,故 G_1 上各缝在反向扩展照明的情况下仍能在 (x_0, y_0) 焦平面上产生重叠的干涉条纹,设其周期为 T'' 。

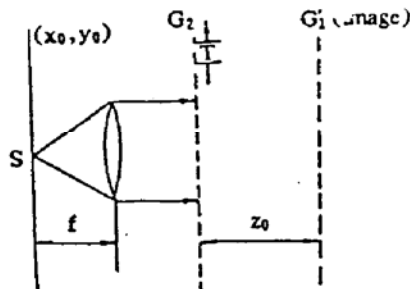


Fig. 5 Diagram of Talbot effect illuminated by collimated wave

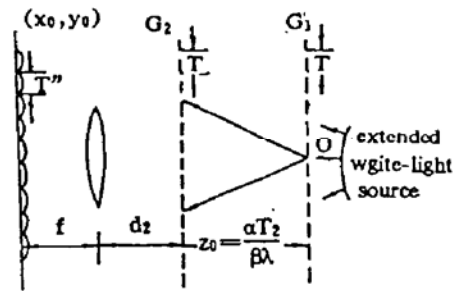


Fig. 6 Typical Lau effect obtained by backward illuminating modulation

下面就来确定 T'' ,当 $\beta = 1$ 时推得 T' 的情形。参看图6,取 G_1 光栅的一条缝 O ,作为点源反向照明 G_2 光栅(用点源球面波来计算不会影响所得结论)。图中标出透镜到 G_2 的距 d_2 是为了计算上处理方便,从最后结果将看出 d_2 对条纹周期没有影响。由文献[7]和文献[8]的结果,得出此时 (x_0, y_0) 平面的复振幅分布 $U(x_0, y_0, z_0)$ 为

$$U(x_0, y_0, z_0) = (f/Z_0) \psi(x_0, y_0, C) \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \exp \left[i2\pi \left(\frac{\alpha T}{f\lambda} \right) m x_0 \right] \varphi(\beta m) \quad (5)$$

其中 $\psi(x_0, y_0, C) = \exp \left[\frac{i\pi C}{\lambda} (x_0^2 + y_0^2) \right]$, $\varphi(\beta m) = \exp(-i\pi \alpha \beta m^2)$,

式中 C 为由 f, Z_0 决定的常数,由(5)式可得干涉条纹的周期 T'' (由文献[9]亦可得出)为

$$T'' = f\lambda/\alpha T \quad (6)$$

可见,条纹周期与 β 无关,则 $T' = T''$ 。所以得出结论,扩展光源照明相同周期 T 的 G_1, G_2 光

栅, 当光栅间距 $Z_0 = \alpha T^2 / \beta \lambda$, α, β 为正整数时, 在透镜后焦面上有周期为 $f\lambda / \alpha T$ 的干涉条纹, 这就是经典的劳效应, 干涉条纹可看成是 G_1 被 G_2 所成的像。若将周期为 T / β 的光栅放置在相应的菲涅尔像面上, 用扩展光源反向照明, 在适当的约束条件下(即适当的光栅开口比^[8, 10]), 一定也能在透镜后焦面得到 $f\lambda / \alpha T$ 的干涉条纹。

综合以上分析, 可以看出劳效应实际是在泰伯自成像面或干涉条纹面上对反向照明的扩展光源作相应的调制而在原光源面上获得增强干涉条纹的一种效应。这就是反向调制照明法所揭示的泰伯与劳效应的内在联系。

4 白光光栅成像效应

当图 1 中 F 系统是两块高密度同周期光栅时, 用白光点源 S 以对称方式入射, 即是指入射光按与 +1 级衍射光成镜对称方式入射, 观察后场由 G_1, G_2 光栅的 +1 级衍射干涉场, 实验上发现在与 S 对称的位置上形成了高对比的消色条纹, 而在其它地方则观察不到, 称此效应为消色效应^[4], 文献[4]给出实验结果和详细的理论分析, 限于篇幅只给出实验所得的消色条纹照片和用标量衍射理论推导的最终结果。如图 7 所示, (x_0, y_0) 平面是点光源面, (x_1, y_1) 平面与 (x_2, y_2) 平面分别是 G_1 与 G_2 光栅平面, (x_3, y_3) 平面是观察平面。其中点源 $S(x_0, 0, 0)$ 发出球面波照明 G_1 光栅面, 该光栅面距离光源面为 d_1 , 两光栅面间距为 d_2 , 观察面距 G_2 光栅为 d_3 , 光栅周期为 T 。设两光栅刻线方向有一小夹角 θ , 其中 G_1 光栅复振幅透过率函数为

$$T_1(x_1, y_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \exp(i2\pi nx_1/T) \quad (7)$$

G_2 光栅的复振幅透过率函数为

$$T_2(x_2, y_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \exp[i2\pi m(x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta)/T] \quad (8)$$

计算观察平面的 +1 级衍射干涉场, 得到经规一化的干涉场强度分布

$$I = \{1 + \cos[\varphi(x_3, y_3, \theta) + \Delta\varphi_1(\lambda) + \Delta\varphi_2(x_0, \theta)]\} / 2 \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x_3, y_3, \theta) &= \frac{2\pi[(\cos \theta - 1)d_1 + d_2 \cos \theta]}{lT} x_3 - \frac{2\pi(d_1 + d_2) \sin \theta}{lT} y_3 \\ \Delta\varphi_1(\lambda) &= \frac{\pi d_2(d_3 - d_1)}{lT_2} \lambda, \quad \Delta\varphi_2(x_0, \theta) = \frac{2\pi[(\cos \theta - 1)d_3 - d_2]}{lT} x_0, \\ l &= d_1 + d_2 + d_3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

当 $\theta = 0$ 时, 即两光栅线平行时, (9) 式变为

$$I = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi d_2}{lT} (x_3 - x_0) + \frac{\pi d_2(d_3 - d_1)}{lT^2} \lambda \right] \right\} \quad (11)$$

由(11)式可见, 当 $d_3 = d_1$ 时, I 与波长无关, 且 $x_3 = x_0$ 时, 观察区域处于干涉场零程差区域附近, 获得高对比的干涉条纹, 即所谓的消色效应^[4]。

由(11)式可得消色条纹的周期为 $T' = lT/d_2$, 采用 $T = 1/650$ mm 的两块全息光栅, 取 $l = 385$ mm, $d_2 = 3.0$ mm, 可得 $T' = 0.2$ mm 的消色条纹, 如图 8(已放大)所示。这里获得的

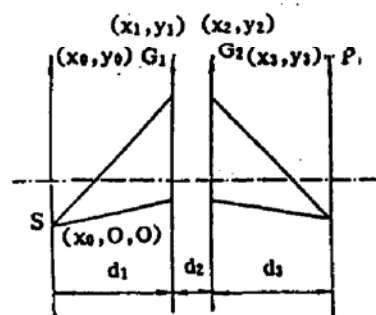


Fig. 7 Achromatic effect derived by Fresnel linear diffraction principle

消色效应其意义相当于前述的泰伯效应，仿照劳效应（即单色光光栅成像效应）的分析类似地可在消色效应的基础上获得白光光栅成像效应。如图 9 所示，用干板记录周期 $T' = 0.2 \text{ mm}$ 的消色条纹，显影，定影后就成了一块黑白光栅 G_3 ，将 G_3 重新置于原处，用扩展白光光源反向照明 G_3 ，得如图 10 所示结果，在光源面 (x_0, y_0) 上获得了对比很好的消色条纹，由于对称性，



Fig. 8 Photo of the achromatic fringes

此时消色条纹的周期应与 G_3 的周期相同。这时与 G_3 等周期的消色条纹可看成是 G_3 经双光栅 G_1 、 G_2 的 +1 级衍射干涉所成的像，从这一意义讲可称其为白光光栅成像效应，这一效应至今未见报道。由以上的反向照明分析可以发现劳效应（光栅成像效应）和泰伯效应（自成像效应）与白光光栅成像效应（三光栅扩展白光衍射干涉效应）和消色效应（双光栅白光衍射干涉效应）这两组效应之间的深刻的物理联系。

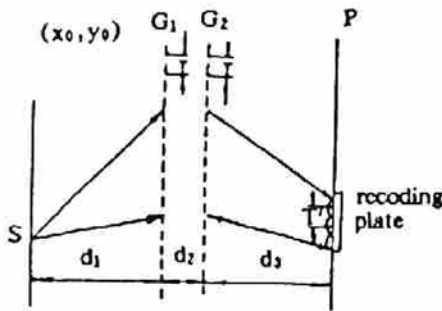


Fig. 9 Diagram of recording achromatic fringes under white-light point illumination

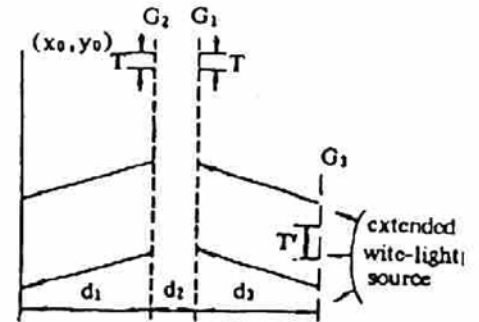


Fig. 10 Diagram of the White-light grating imaging backlit by white-light extended source

为了便于用眼直接观察，运用莫尔偏折术，在 (x_0, y_0) 面消色条纹处再置入另一块周期为 0.2 mm 的黑白光栅 G_4 ，这时在 G_4 光栅表面产生莫尔(moire)条纹。图 11 是上述四光栅 (G_1, G_2, G_3, G_4) 干涉系统示意图，图 12 是在 G_4 光栅表面产生的莫尔条纹(莫尔角度约为 4°)。可见在消色效应的基础上首先在光源面加入调制光栅获得了白光光栅成像效应，再在其成像面(即接收面)加入莫尔偏折光栅，又可获得新的四光栅扩展白光干涉系统，其高对比、高亮度的消色莫尔条纹具有实用意义。

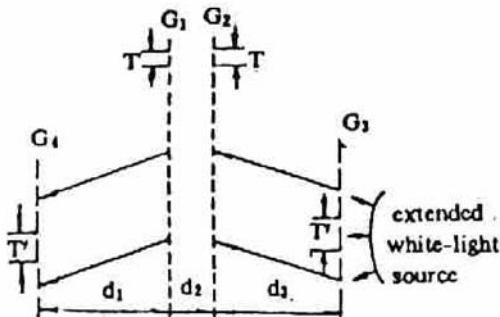


Fig. 11 Diagram of the four gratings interference system

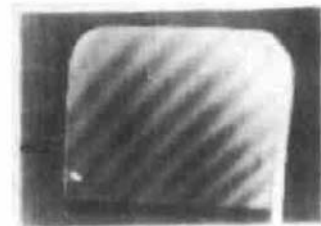


Fig. 12 The moire fringes of four gratings interference system by moire deflectometry

由反向照明调制法所获得的扩展光源照明的干涉系统显然能够充分利用光能，大大改善观察效果，降低对光源的要求。其实，若在光源调制光栅上有规律或无规律地遮住一些缝，

除了降低最终干涉场的条纹强度外,将不改变干涉场状态,也就是说调制并不一定要用光栅来完成,但所使用的调制屏上的光源缝必须与原始调制光栅的开缝规律相吻合。这一特性一方面大大提高了光源调制的灵活性与适用性,另一方面也可用于某些特征空间编码的模糊识别。另外调制光栅的前后移动都将影响干涉条纹的对比度,故可用作定位校准。由白光双光栅消色效应扩展出的四光栅扩展白光干涉系统在横向莫尔测量等领域也将有使用价值。

结束语 通过反向调制照明法不仅揭示了泰伯效应与劳效应的内在联系,而且把此方法运用于新近报道的消色效应,扩展出白光光栅成像效应,并在实验上进行了验证。进而运用莫尔偏折法又获得新型四光栅扩展白光干涉系统。结果表明用反向调制照明法分析光栅成像干涉系统是一种有效的分析方法,它对于干涉仪的设计,干涉条纹对比度的增强等都有指导意义。

参 考 文 献

- [1] H. F. Talbot, *Phil. Mag. and J. Sci* (London), 1836, 9: 401
- [2] E. Lau, *Interference Phenomenon on Double Gratings. Anu. Phys.*, 1949, 6: 417
- [3] K. Patorski, *Incoherent superimposition of multiple self-image under plane wave-front illumination. Appl. Opt.*, 1986, 25(14): 2396~2403
- [4] 张海联, 顾去吾, 白光双光栅衍射干涉的消色效应. *光学学报*, 1993, 13(9): 818~823
- [5] Lord Rayleig, *Lond Edinb Dubl. Phil. Mag.*, 1881, 11: 196
- [6] 刘立人, 平面物体的 Lau 效应理论. *光学学报*, 1986, 6(9): 807~814
- [7] 廖江红, 顾去吾, 光学系统中光衍自成像现象: 广义的 Talbot 效应. *光学学报*, 1985, 5(4): 331~335
- [8] 刘立人, 反向脉冲传递法——扩展白光干涉现象研究. *光学学报*, 1985, 5(6): 481~486
- [9] 张海联, 顾去吾, 用杨氏干涉模型解释 Talbot 效应. *光学仪器*, 1992, 14(2): 1~5
- [10] 张海联, 顾去吾, 用杨氏干涉模型解释 Lau 效应. *光学仪器*, 1993, 14(6): 16~19

Analysis of Grating Imaging by the Method of Backward Illuminating Modulation

Zhang Hailian

(*Kunming Institute of Physics, Kunming 650223*)

Gu Quwu

(*Huadong Industry University, Shanghai 200093*)

(Received 21 November 1993; revised 16 February 1993)

Abstract We present an analysis of grating imaging by the method of backward illuminating modulation which is applied to study the backward diffracting interference of grating system. In a simple manner, the interrelation between Talbot effect and Lau effect is revealed successfully. And another achromatic effect of double grating system with self-achromatic-compensation by white-light illumination in Fresnel region is represented, Based on it, for the first time, the white-light grating imaging effect is obtained by the method of backward illuminating modulation.

Key words grating imaging, Lau effect, achromatic fringes, modulation.