

大角度周视彩虹全息图的色模糊

蔡履中

(山东大学光学系, 济南 250100)

摘 要 基于非傍轴理论, 对普通共轭再现及利用孔径共轭技术再现两种情况下大角度环形孔径周视彩虹全息图的色模糊进行了系统地分析, 导出了相应的表达式, 并证明了大参考角及孔径共轭技术的采用并不会使最终像的色模糊与普通彩虹全息图相比发生明显变化, 从而为该类全息图的应用提供了理论依据。

关键词 彩虹全息图, 周视全息图, 色模糊, 非傍轴理论。

1 引 言

鉴于彩虹全息图在全息显示等领域中的重大实用价值, 已有不少文献对其成像过程及决定成像质量的主要因素色模糊进行了理论及实验研究^[1~5]。所有这些分析均基于傍轴理论, 即假设记录时物光及参考光均与光轴(全息图平面法线)夹角甚小, 为了用较为简易的方法及白光源看到 360°周视像, 近来发展了一种周视彩虹全息术^[6~9], 它避免了由大量基元条带全息图综合而成的合成全息图的复杂的制作过程, 而直接由环形孔径获得周视效果。在这种方法中, 参考光垂直射向记录干板, 物光则通过环形缝斜射向干板。作者曾从理论及实验两方面证明^[8,9], 为获得真正的周视并抑制共轭像的干扰, 物光与参考光中心所夹角度即参考角必须相当大, 对普通 6 μm 干板应大于 45°。显然, 这时对斜向物光傍轴近似已经失效。非傍轴情况下彩虹全息图色模糊的研究迄今尚未见报道。本文将对此问题作较为系统的分析, 对普通共轭再现及利用孔径共轭技术再现两种情况导出色模糊的表达式, 说明其物理机制, 并与普通彩虹全息图作一比较。

2 普通共轭再现时的色模糊

参见文献[8]中的光路, 环形孔径彩虹全息图(Annular-aperture rainbow hologram, 简称 AARH)的记录和再现原理可简单地用图 1 来表示。其中图 1(a)为记录过程, 图中仅画出了环形缝的单侧截面 AB, 其宽度为 W, 中心为 S; 过该缝物光的会聚点即物点为 O, 物光中心角为 θ ; 参考光为中心线与干板 H 垂直的会聚波, 会聚点为 R; 记录波长为 λ_0 。图 1(b)为普通共轭再现过程, 这时再现光源为与 R 同位置的白光点源 C, 不同色光的缝像与物像产生弥

散。设观察者瞳孔在 Z 方向的直径为 D ，瞳孔所能接收到的中心波长为 λ ，相应缝像中心为 S_i ，边缘为 A_i, B_i ；两极端波长则为 λ' 和 λ'' ，相应缝像中心为 S'_i 和 S''_i ，边缘为 A'_i, B'_i 和 A''_i, B''_i 。这时所看到的物像模糊区域为 O_i, O'_i ，其中心视角为 θ_i ，角弥散为 $\Delta\theta_\lambda$ 。

由全息图的非傍轴理论^[10]，物点与像点的位置满足

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_c} \pm \mu \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_r} \right),$$

$$\frac{x_i}{R_i} = \frac{x_c}{R_c} \pm \mu \left(\frac{x_0}{R_0} - \frac{x_r}{R_r} \right), \quad (1)$$

式中 $\mu = \lambda/\lambda_0$ ， λ 为再现波长；正负号中正号相应于原始像，负号相应于共轭像；各 R 为所考察点到全息图中心 O 的径向距离，对发散波取正值，对会聚波取负值，下标 o, r, c, i 分别表示物点，参考波源点，再现波源点及像点。对图 1 共轭再现情况， $x_r = x_c = 0, R_c = -R_r$ ，以上方程即

$$\frac{1}{R_i} = (\mu - 1) \frac{1}{R_r} - \mu \frac{1}{R_0}, \quad \frac{x_i}{R_i} = -\mu \frac{x_0}{R_0}, \quad \text{或} \quad \sin \theta_i = \mu \sin \theta. \quad (2)$$

由(2)式可分析不同波长缝像及物像的弥散。通常物点与 H 的距离 $|z_0|$ 远小于缝中心与 H 的距离 $|z_s|$ ，分析表明此时物像弥散基本上沿 Z 轴方向，而缝像弥散则稍有倾斜，如图 1(b) 所示。显然，物像的角弥散为

$$\Delta\theta_\lambda = D \sin \theta_i / R_i + \angle S'_i O B'_i + \angle S''_i O A''_i, \quad (3)$$

式中 R_i 为瞳孔中心与 O 点距离。一般 $\Delta\theta_\lambda \ll \theta_i$ ，近似有

$$\angle S'_i O B'_i + \angle S''_i O A''_i = \Delta\theta_{M_i} = M_\theta \Delta\theta_M \quad (4)$$

式中 $\Delta\theta_M$ 和 $\Delta\theta_{M_i}$ 分别为记录时 AB 及其 λ 色再现像 $A_i B_i$ 对 O 点的张角，如图 2 所示； M_θ 为相应的角放大率。由图 2(a) 及(3)式，显然有

$$\Delta\theta_M = W \cos \theta / R_s, \quad M_\theta = \frac{d\theta_i}{d\theta} = \frac{\mu \cos \theta}{\cos \theta_i} = \frac{\mu \cos \theta}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \theta}} \quad (5)$$

故(3)式可写为

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta_\lambda &= D_\perp / R_i + M_\theta W_\perp / R_s, \\ W_\perp &= W \cos \theta, \quad D_\perp = D \sin \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 W_\perp 为记录时 W 在与 R_s 垂直方向的投影， D_\perp 为再现时 D 在与视线 R_{ri} 垂直方向的投影。通常观察者瞳孔位于缝像位置，则有

$$R_i = |R_{ri}| = M_r R_s, \quad (7)$$

式中 M_r 为再现时缝像的径向放大率，它可以由(2)式导出(式中 R_0 取为 R_s, R_i 取为 R_{ri})，即

$$M_r = |R_{ri}| / R_s = [\mu + (\mu - 1) R_s / |R_r|]^{-1}. \quad (8)$$

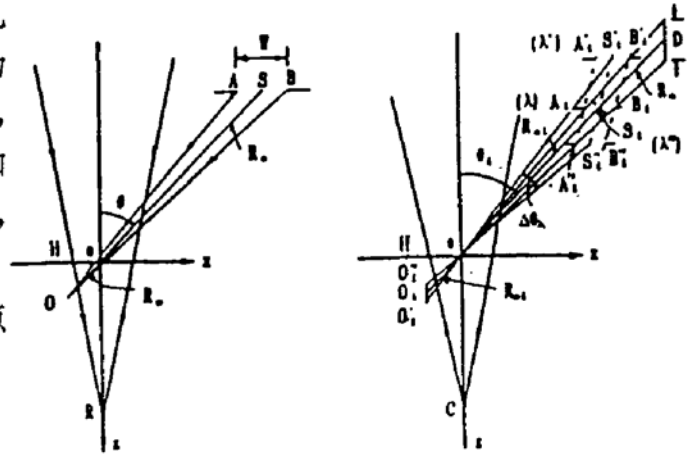


Fig. 1 Geometry of conventional large angle annular-aperture 360° rainbow hologram (AARH) in principle; (a) recording, (b) reconstruction

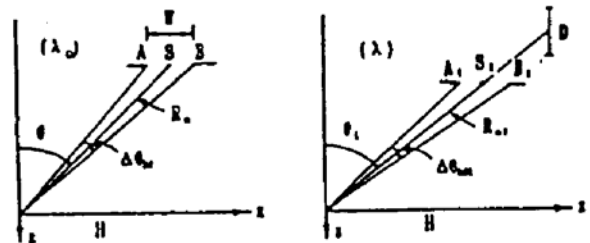


Fig. 2 The angles subtended by (a) slit in recording of AARH and (b) its real image in reconstruction (b)

故(6)式可写为

$$\Delta\theta_\lambda = [(D_\perp/M_s) + M_0W_\perp]/R_s \tag{9}$$

由图 1(b)易见物像点的模糊量即

$$\Delta I_i = |R_{oi}| \Delta\theta_\lambda, \tag{10}$$

式中 R_{oi} 为 λ 色光下再现物像点的径向距离。一般的 $|R_{oi}| \ll |R_s|$, (2)式给出

$$R_{oi} = -R_0/\mu, \tag{11}$$

相应地

$$\Delta I_i = |R_{oi}| [(D_\perp/M_s) + M_0W_\perp]/\mu R_s, \quad \Delta I_i = |Z_0| [(D_\perp/M_s) + M_0W_\perp]/\mu |Z_s| \tag{12}$$

参照(5)和(8)式, (12)式亦可用记录时的原始参数写为

$$\Delta I_i = (|Z_0|/|Z_s|) \{ [1 + (1 - 1/\mu)(R_s/|R_r|)] D_\perp + [1 + (1 - \mu^2)\text{tg}^2\theta]^{-1/2} W_\perp \} \tag{13}$$

3 用孔径共轭技术再现时的色模糊

上述普通共轭再现方式中所看到的物像是膺视像, 这在三维显示中会带来不便。为得到正视像, 可利用孔径共轭技术^[11], 作者用实验证明了该方法对环形孔径彩虹全息图的有效性^[8]。这时的记录(波长 λ_0)及再现(对中心波长 λ)配置分别示于图 3(a)、(b), 其中 A,B, 为缝 AB 的实像。此时(1)式中的正负号应取正号。对再现缝像有

$$\frac{1}{R_{si}} = \frac{1}{R_c} + \mu\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_r}\right), \quad \frac{x_{si}}{R_{si}} = \mu \frac{x_s}{R_s} \tag{14}$$

式中 R_s , R_r 和 R_c 皆为正值, 因为它们都相应于发散波。为保证得到实的缝像, 即让 $R_{si} < 0$, 必须满足下述条件

$$\mu R_c(R_s - R_r) > R_s R_r \tag{15}$$

通过与上节完全相似的分析, 可以得到当人眼位于入色光缝像处观察时的相应公式为

$$\Delta\theta_\lambda = \frac{1}{R_s} \left(\frac{1}{M_s} D_\perp + M_0 W_\perp \right),$$

$$\Delta I_i = |R_{oi}| \Delta\theta_\lambda = M'_0 |R_0| \Delta\theta_\lambda \tag{16}$$

这里缝像的角放大率 M_0 仍为(5)式, 因为(2)式依然成立。但由于几何配置不同, 缝像及物像的径向放大率表达式应修正为

$$M'_s = \frac{|R_{si}|}{R_s} = -\frac{R_{si}}{R_s} = \frac{R_c R_r}{\mu R_c (R_s - R_r) - R_s R_r} \tag{17}$$

$$M'_0 = \frac{|R_{oi}|}{|R_0|} = \frac{R_c R_r}{\mu R_c (R_r - R_0) + R_0 R_r} = \frac{1}{\mu} \left[1 - R_0 \left(\frac{1}{R_r} - \frac{1}{\mu R_c} \right) \right]^{-1} \tag{18}$$

式中 $M'_s > 0$, $M'_0 > 0$, R_0 对发散物波 ($z_0 < 0$) 为正, 对会聚物波 ($z_0 > 0$) 为负。

由(16)式, 并应用 $|R_0|/R_s = |z_0|/|z_s|$, 可以得到色模糊量

$$\Delta I_i = \frac{|z_0|}{|z_s|} M'_0 \left(\frac{1}{M_s} D_\perp + M_0 W_\perp \right) \tag{19}$$

或利用原始参数表示为

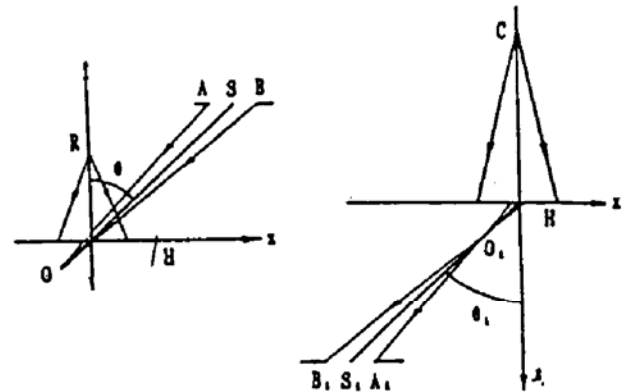


Fig. 3 Geometry of AARH with aperture conjugation technique; (a) recording; (b) reconstruction

$$\Delta I_i = \frac{|z_0|}{|z_s|} \left[1 - R_0 \left(\frac{1}{R_r} - \frac{1}{\mu R_c} \right) \right]^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{R_s}{R_r} - 1 \right) - \frac{R_s}{\mu R_c} \right] D_{\perp} + [1 + (1 - \mu^2) \operatorname{tg}^2 \theta]^{-1/2} W_{\perp} \right\} \quad (20)$$

4 讨 论

观察以上两种情况下色模糊的表达式(12)及(19), 并将它们与普通彩虹全息图的色模糊, 例如文献[1]中的(7)式

$$\Delta I_i = \frac{|z_0|}{|z_s|} (D + W) \quad (21)$$

相比较, 可以清楚地看到以下事实:

1) 在所有三种情况下, 色模糊表达式具有类似的形式。

2) 普通彩虹全息图及大角度环形孔径彩虹全息图的色模糊表达式有两点主要区别。首先, 前者中之宽度 D 、 W 为后者中之 D_{\perp} 、 W_{\perp} 所取代; 其次, 后者中需考虑某些角放大率及径向放大率的影响, 而这在前者中由于傍轴近似并不明显出现。

3) 在环形孔径彩虹全息图的两种再现方法中, 由于几何配置不同, 径向放大率具有不同的表达式。例如, 普通共轭再现时一般有 $|R_0| \ll |R_r|$, 由(11)式对物像有 $M_0 = 1/\mu$; 但在利用孔径共轭技术再现时, R_r 可以不太大, 这时应采用更精确的表达式(18)。

作为一个特例, 考察在记录波长附近观察普通共轭再现像的色模糊。这时 $\mu = 1$, $M_s = M_r = 1$, (12)式简化为

$$\Delta I_i = \frac{|z_0|}{|z_s|} (D_{\perp} + W_{\perp}), \quad (22)$$

此式与(21)式完全相同, 只是把 D 、 W 换成了等效的 D_{\perp} 、 W_{\perp} 。

一般地, 可以由(13)及(20)式讨论记录及再现条件对最终像色模糊 ΔI_i 的影响。在所有情况下, ΔI_i 均正比于物点的轴向深度 $|z_0|$ 。 ΔI_i 还依赖于记录与再现时的几何配置, 即 R_r 、 R_s 、 R_c 及 θ 各量; 并随观察时的中心波长不同而稍有不同。但是, 在通常实用情况下, ΔI_i 与(22)式给出的值并无太大偏离, 因为 M_s 、 M_r 及 M_0 各量皆与 1 相差不大。

作为实例, 取文献[8]中孔径共轭技术再现的实验数据: $\theta = 47^\circ$, $R_r = 12.7 \text{ cm}$, $R_c = 80 \text{ cm}$, $R_s = 25.5 / \cos 47^\circ = 37.4 \text{ cm}$, $\lambda = 633 \text{ nm}$, 并取观察波长为白光平均波长 $\lambda = 555 \text{ nm}$, 经计算有 $\mu = 0.877$, $M_0 = 0.78$, $M_r = 0.81$, 在 $z_0 = +1 \sim -1 \text{ cm}$ 范围内 $M_0 = 1.07 \sim 1.22$ 。若保持其它参数不变而取 $R_c = |R_r| = 1 \text{ m}$, 则得普通共轭再现时 $M_s = 1.2$ 。可见两种情况下各放大率与 1 的偏差均不超过 22%。

当观察再现像时, 观察者的瞳孔平面自然地处于视线的正交方位, 这时 D_{\perp} 即瞳孔实际直径 D 。因此, 只要 W_{\perp} 与普通彩虹全息中之 W 相同, 大角度周视彩虹全息像的色模糊与普通彩虹全息像相比并无显著变化。

最后对以上分析作几点补充说明。

1) 尽管(21)、(22)式是相似的, 但在大角度环形孔径彩虹全息图中, $|R_{si}|$ 一般取为一个适当的观察距离 ($\geq 25 \text{ cm}$), 若该值从而 R_s 取为定值, 则关系式 $|z_s| = R_s \cos \theta$ 指出较大的 θ 会导致较小的 $|z_s|$ 及较大的 ΔI_i 。换言之, 实际制作环形孔径彩虹全息图时对较大 θ 应采用较大的 R_s , 使环缝平面距 H 平面不至于太近。

2) 以上分析中为方便计取 H 平面坐标原点 O 位于 S 点及所考察物点 O 的连线。更精细的计算(由于繁冗, 此处略去)证明, 其它物点的色模糊亦可近似用前文所得公式来表示。

3) 本文仅考察像点的色模糊。尚有其它因素影响像的分辨率。但理论与实践均表明, 只要缝不是太窄(实践中一般取数毫米), 白光再现时色模糊将起主要作用。

结 论 基于非傍轴理论, 对普通共轭再现及利用孔径共轭技术再现两种情况系统地分析了大角度环形孔径周视彩虹全息图的色模糊。这两种情况下色模糊的表达式均与普通彩虹全息图的表达式相似, 只是将缝与瞳孔的线度用其有效值(横向投影)代替, 并各乘以由几何配置所决定的角度或径向放大率因子。由于这些放大率均与 1 偏差不大, 故只要 $|Z_c|$ 适当大, 在环形孔径彩虹全息图方法中采用大参考角及孔径共轭技术并不会使最终像的色散模糊有明显劣化。这一分析为大角度环形孔径彩虹全息图的应用提供了理论依据, 并已被文献[8]的实验工作所证实, 该实验中再现像清晰, 完全可以与普通彩虹全息像相比拟。

参 考 文 献

- [1] J. C. Wyant, Image blur for rainbow holograms. *Opt. Lett.*, 1977, 1(4): 130~132
- [2] H. Chen, Color blur of the rainbow hologram. *Appl. Opt.*, 1978, 17(20): 3290~3293
- [3] 蔡履中, 张幼文, 彩虹全息图成像的傅里叶分析. *物理学报*, 1982, 31(8): 1020~1029
- [4] Y. W. Zhang, L. Z. Cai, Point spread and transfer functions for the rainbow holographic process. *Appl. Opt.*, 1984, 23(10): 1493~1498
- [5] 蔡履中, 国承山, 张幼文, 带状白光光源再现彩虹全息像的分辨率及表现特性. *应用激光*, 1989, 9(3): 102~105
- [6] 王典民, 哈流柱, 王民草, 周视彩虹全息术. *光学学报*, 1990, 10(11): 996~998
- [7] 王典民, 哈流柱, 王民草, 周视彩虹全息术——孔径共轭技术. *应用激光*, 1992, 12(2): 154~155
- [8] L. Z. Cai, C. S. Guo, Large-angle one-step annular-aperture rainbow hologram. *Opt. Lett.*, 1993, 18(1): 69~71
- [9] 蔡履中, 国承山, 周视彩虹全息图中共轭像的抑制. *光学学报*, 1993, 13(8): 723~727
- [10] E. B. Champagne, Nonparaxial imaging, magnification, and aberration properties in holography. *J. O. S. A.*, 1967, 57(1): 51~55
- [11] H. Chen, Q. Z. Shan, M. Y. Chen, Aperture conjugation technique in astigmatic rainbow hologram. *Appl. Opt.*, 1981, 20(20): 3557~3561

Color Blur of Large-Angle Annular-Aperture 360° Rainbow Hologram

Cai Lüzhong

(Department of Optics, Shandong University, Jinan 250100)

(Received 25 December 1993)

Abstract The nonparaxial theory is applied to analyze the color blur of the annular-aperture rainbow hologram where the paraxial approximation is invalid due to the large incident angle of object wave. The results for both reconstruction methods, the conventional conjugate reconstruction and readout with the aperture conjugation technique, are derived. It shows that the color blur in both cases has similar form and about the same values compared with ordinary rainbow hologram.

Key words rainbow hologram, 360° hologram, color blur, nonparaxial theory.