

驻波场中两能级原子运动方程及其解

程 亚 陈建文

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 首次将固体理论中的 LLP 变换用于处理两能级原子与驻波场相互作用体系的全量子哈密顿量。这一结果对于研究原子束穿透驻波场所造成的折射十分重要。

关键词 驻波, 两能级原子。

1 引 言

原子物质波的干涉研究是当前原子光学研究的一个热点^[1]。正如要实现可见光的干涉, 必须要有一装置对光波进行分波后再将其重新汇合, 才能形成干涉条纹。对于原子波干涉也是同样。使用光学驻波实现对原子波的分波就是其中一个重要手段。这方面的实验报道近年来屡见不鲜^[2]。

早在八十年代初, 当时原子波干涉的研究还未兴起, Arimodo 等人就采用半经典的方法处理了这一问题^[3]。但是对于这样一个量子效应很显著的体系, 半经典的处理必然抹杀了许多细节。近年来, 基于原子物质波干涉仪研制的需要, 这一领域的理论和实验工作都比较多。但理论研究并没有彻底解决这方面的问题^[4,5]。

本文在全量子的框架内讨论了这个问题, 以期获得更精确的结果。所采用的模型已作了理想化: 原子仅有上、下两个能级, 且视为单原子与驻波场作用(要求入射原子束中原子密度较稀); 入射原子波为严格单色平面波; 以及采用单色、稳定的光源。目前大多数实验都近似符合以上条件。

本文所采用的哈密顿量的由来为: 驻波场由相对运动的两束光波相干叠加而成, 因而其中必有动量相反的两种光子。它们与原子作用时, 除了交换能量, 同时还传递了动量, 造成了原子运动方向的改变。故此, 只有将驻波场看成相对运动的两列行波, 才能反映这一事实。尽管这样已经忽略了驻波场中往返光束之间的干涉叠加效应, 只要原子束的截面远大于光波波长, 其影响是很小的。

2 运动方程及其解

两能级原子被驻波场折射情况如图 1 所示。 $|g\rangle$ 为原子激发态, $|e\rangle$ 为原子基态, ω_0 为原

子跃迁频率, ω_L 为驻波频率。入射平面原子波沿 y 方向, 经驻波折射打在屏 L 上。图上各峰即为原子到达的几率峰, 实验通常给出三个峰。分析表明, 峰 0 包含了大量的噪声原子。这是由于入射原子实际上有许多能级状态。大量不处于 $|e\rangle$ 或 $|g\rangle$ 态的原子出射后集中在峰 0 内。因为此时驻波已大致调谐至与 ω_0 接近, 只有 $|e\rangle$ 、 $|g\rangle$ 态的原子才能与之共振作有效折射, 其余原子近乎不被折射。当然, 峰 0 也包含了少量 $|e\rangle$ 、 $|g\rangle$ 态原子, 由于它们对分波无贡献, 可不予考虑。峰 0 两侧 ± 1 峰的位置体现了分波的程度, 是问题的关键。

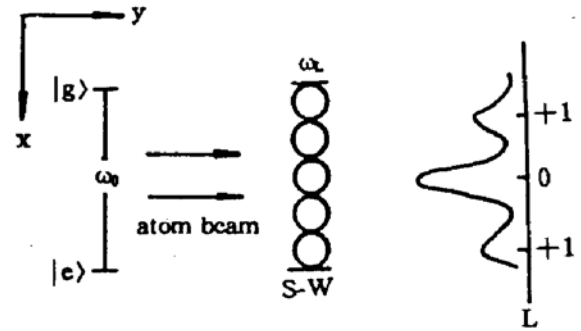


Fig. 1 Refraction of atoms by standing wave field

如前言所述, 将驻波场矢势 A 化为双行波场 ($A_1 + A_2$) 后, 按通常的量子化程序即得体系的全量子哈密顿量 H_T :

$$H_T = P^2/2m + \hbar\omega_0 S_z + \hbar\omega_L(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) + \hbar g S^+ a_1 \exp(ikx) + \hbar g^* a_1^\dagger S^- \exp(-ikx) + \hbar g S^+ a_2 \exp(-ikx) + \hbar g^* a_2^\dagger S^- \exp(ikx) \quad (1)$$

上式已经作了旋转波近似。其中 m 为原子质量, P 为原子动量, ω_0 为两能级原子的跃迁频率, $\hbar\omega_0 = (E_g - E_e)$, E_g 、 E_e 分别为原子激光发态和基态的能量。需要说明的是, 已将能量零点取在 $(E_g - E_e)/2$ 处, 即 $E_g = \hbar\omega_0/2$, $E_e = -\hbar\omega_0/2$ 。下文的计算都基于此。 ω_L 为光驻波场频率, a_1^\dagger 、 a_2^\dagger 分别代表运动方向沿 $\pm x$ 轴的光子的产生算符, a_1 、 a_2 是相应的湮灭算符, 其对易关系为 $[a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'}$, $\lambda, \lambda' = 1, 2$ 。伪自旋算符 S_z 、 S^+ 、 S^- 表征原子状态, 遵循: $S^+ |g\rangle = S^- |e\rangle = 0$, $S^+ |e\rangle = |g\rangle$, $S^- |g\rangle = |e\rangle$, $S_z |g\rangle = (1/2) |g\rangle$, $S_z |e\rangle = -(1/2) |e\rangle$, 并满足下列各对易关系: $[S^+, S^-] = 2S_z$, $[S^\pm, S_z] = \mp S^\pm$ 。 g, g^* 互为复共轭, 是表征原子与光场耦合强度的常数。

2.1 LLP 变换^[6][参见附录]

令波函数 ψ 为总哈密顿量 H_T 的解。构造么正算符 $U = \exp[-i(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)kx]$, 那么波函数 $\Phi = U\psi$ 是哈密顿量 $H_1 = U^{-1}H_T U$ 的解。不难得出:

$$H_1 = (\tilde{P}_x - \hbar k a_1^\dagger a_1 + \hbar k a_2^\dagger a_2)^2/2m + P_y^2/2m + \hbar\omega_0 S_z + \hbar\omega_L(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) + \hbar g S^+(a_1 + a_2) + \hbar g^*(a_1^\dagger + a_2^\dagger)S^- \quad (2)$$

H_1 与 H_T 的区别在于, H_1 中已不再包含体系 x 方向的坐标算符。因而 \tilde{P}_x 已不再是算符而是可对易的 C 数。在附录中将看到 \tilde{P}_x 就是体系 x 方向的总动量。这里就是 $\tilde{P}_x = 0$ 。同时过程前后 P_x 也是守恒量, 可暂不考虑。将 $\tilde{P}_x = 0$ 代入(2)式, 如附录中的推导, 并令: $\omega_c = \omega_L + (\hbar k^2)/2m$ 得:

$$H_2 = \hbar\omega_c(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) + \hbar\omega_0 S_z + \hbar g S^+(a_1 + a_2) + \hbar g^*(a_1^\dagger + a_2^\dagger)S^- \quad (3)$$

2.2 量子布洛赫方程

(3)式是双模场的量子布洛赫方程的哈密顿量, 两个不同模的光子有相同的频率 ω_c 。不难验证, 激发数 $N = S_z + a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2$ 是守恒量, $[H_2, N] = 0$ 。转到海森堡表象求解(3)式的运动方程。首先解 S_z 的方程, 代入海森堡公式:

$$\begin{aligned}\dot{S}_z &= (i/\hbar)[H_2, S_z] = i[gS^+(a_1 + a_2) - g^*S^-(a_1^\dagger + a_2^\dagger)] \\ \ddot{S}_z &= (i/\hbar)^2[H_2, \dot{S}_z] = (\omega_0 - \omega_1)[gS^+(a_1 + a_2) + g^*(a_1^\dagger + a_2^\dagger)S^-] \\ &\quad - 4|g|^2(a_1^\dagger a_1 S_z + a_2^\dagger a_2 S_z + a_1^\dagger a_2 S_z + a_2^\dagger a_1 S_z + S^+ S^-)\end{aligned}\quad (4)$$

直接求解(4)式是不可能的, 只能求解(4)式在特定表象里的平均值方程。另外, (4)式中还有 $a_1^\dagger a_2 S_z$ 、 $a_2^\dagger a_1 S_z$ 项, 必须设法消去。考虑到所用的驻波场实际为两列行波场的相干叠加, 故有 $a_1^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 = (a_1^\dagger + a_2^\dagger)(a_1 + a_2) \approx (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) \times 2$, 此时, 令原子数 S_z 的本征态 $|m\rangle$ 及光子相干态 $|\alpha_1\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle$ 三者直积 $|\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle|m\rangle$ 为态矢。在海森堡表象里, $t=0$ 时刻各算符满足 $\langle S_z \rangle = \langle m \rangle$, $a_1|\alpha_1\rangle = \alpha_1|\alpha_1\rangle$, $a_2|\alpha_2\rangle = \alpha_2|\alpha_2\rangle$, 并有 $|\alpha_1| = |\alpha_2|$, α_1 、 α_2 为复数, 则初始总光子数 $n = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2$ 。对守恒量 N 和 H_2 分别取平均, 则有 $\langle N \rangle = m + n$, $\langle H_2 \rangle = \hbar\omega = \hbar m\omega_0 + \hbar n\omega_1$, 其中 $\langle N \rangle = \langle m | \langle \alpha_2 | \langle \alpha_1 | N | \alpha_1 \rangle | \alpha_2 \rangle | m \rangle$, $\langle H_2 \rangle$ 类同。 n 为总光子数, 可为任意正整数; m 表征原子能级状态。同样, $\langle S_z \rangle$ 、 $\langle \omega^R \rangle$ 代表了相同意义上的平均值。将上述各条件代入已对两边取过平均后的方程(4), 得到:

$$\ddot{\langle S_z \rangle} = (\omega_0 - \omega_1)[\langle \omega^R \rangle - \langle N \rangle \omega_1 - (\omega_0 - \omega_1)\langle S_z \rangle] - 4|g|^2[2\langle N \rangle + 1]\langle S_z \rangle \quad (5)$$

式中, $\langle \omega^R \rangle = \langle H_2 \rangle / \hbar = \langle m \rangle \omega_0 + \langle n \rangle \omega_1 = \langle S_z \rangle \omega_0 + \langle n \rangle \omega_1$, 令 $\Omega^2 = (\omega_0 - \omega_1)^2 + 4|g|^2[2\langle N \rangle + 1]$, Ω 实际就是拉比(Rabi)频率。(6)式可进一步化为:

$$\ddot{\langle S_z \rangle} + \Omega^2 \langle S_z \rangle = (\omega_0 - \omega_1)(\omega^R - \langle N \rangle \omega_1) = \langle S_z \rangle_z (\omega_0 - \omega_1)^2 \quad (6)$$

(6)式已为一般的常微分方程, 解得:

$$\langle S_z \rangle_t = \langle S_z(0) \rangle \left[1 - \frac{8|g|^2(2N+1)}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) \right], \quad (7)$$

式中 $\langle S_z \rangle_t$ 为 t 时刻的 $\langle S_z \rangle$, $\langle S_z(0) \rangle$ 为 $t=0$ 时的 $\langle S_z \rangle$, 由初始时刻原子所处状态决定其正负。(7)式的解就是同等强度下单模驻波场的解。这一巧合反映了两列行波对于原子内部状态的影响等同于同条件下的驻波。

2.3 光子数差运动方程

为了描述光子与原子之间动量的转移, 还必须知道 $\langle a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 \rangle$ 随时间变化情况。因为任何时刻体系总的 x 方向动量为零, 即:

$\bar{P}_x = \langle \bar{P}_x \rangle = \langle P_x \rangle + \hbar k \langle a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 \rangle = 0$, 只要知道某时刻的 $\langle a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 \rangle$, 由上式即可知道该时刻原子的平均动量 $\langle P_x \rangle$ 。令

$$T = \langle a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 \rangle = \langle a_1^\dagger a_1 \rangle - \langle a_2^\dagger a_2 \rangle. \quad (8)$$

由海森堡公式:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle a_1^\dagger a_1 \rangle &= \langle (i/\hbar)[H_2, a_1^\dagger a_1] \rangle = \langle i(gS^+ a_1 - g^* a_1^\dagger S^-) \rangle \\ \frac{d^2}{dt^2} \langle a_1^\dagger a_1 \rangle &= \langle (i/\hbar)^2 [H_2, a_1^\dagger a_1] \rangle = \langle (\omega_1 - \omega_0)(gS^+ a_1 + g^* a_1^\dagger S^-) \\ &\quad + 4|g|^2 \cdot (a_1^\dagger a_1 S_z + S^+ S^-/2) + 2|g|^2 [S_z(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)] \rangle.\end{aligned}\quad (9)$$

同样, 对 $\langle a_2^\dagger a_2 \rangle$ 也有:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \langle a_2^\dagger a_2 \rangle &= \langle (\omega_2 - \omega_0)(gS^+ a_2 + g^* a_2^\dagger S^-) + 4|g|^2 (a_2^\dagger a_2 S_z + S^+ S^-/2) \\ &\quad + 2|g|^2 [S_z(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)] \rangle.\end{aligned}\quad (10)$$

通常实验中往往将激光调谐至 $\omega_i \approx \omega_0$, 以形成原子的共振吸收, 扩大分波效果, 故 $(\omega_i - \omega_0)$ 项可略去。同时, 作以下截断近似, $\langle S_z(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) \rangle \approx \langle S_z \rangle \langle a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 \rangle = \langle S_z \rangle T$ 。由此, 联立(8)、(9)、(10)式, 得到:

$$\ddot{T} = 4|g|^2 \langle S_z \rangle T. \quad (11)$$

将(7)式 $\langle S_z \rangle$ 的解代入(11)式, 得:

$$\ddot{T} = 4|g|^2 \langle S_z(0) \rangle \left[1 - \frac{8|g|^2(2N+1)}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) \right] T \quad (12)$$

令常数 $C = 4|g|^2 \langle S_z(0) \rangle$ 。当 $\omega_i \approx \omega_0$ 时, 常数 $\frac{8|g|^2(2N+1)}{\Omega^2} \approx 2$ 。故(12)式进一步简化为:

$$\ddot{T} \approx C[1 - 2\sin^2(\Omega t/2)]T = C\cos(\Omega t)T \quad (13)$$

(13)式有一显然的解 $T = 0$, 鉴于前述对图 1 中峰 0 的分析, 故不予考虑。这里没有用数值方法对(13)求解, 仅考虑了 $\Omega t \ll 1$ 的情况, 此时(13)式简单地化为,

$$\ddot{T} \approx CT. \quad (14)$$

(14)式只有在原子仅用极短的时间飞越了驻波光场的情况下成立, 对应于 P , 很大的原子和很窄的激光光束两个实验条件。值得说明, (14)式中的常数 C 中包含了 $\langle S_z(0) \rangle$ 的因子, 故 C 可正可负。对此分别求解, 并考虑 $t = 0$ 时, $T = 0$ 的初始条件, 得:

$$\begin{cases} T_1 = A(e^{\sqrt{C}t} - e^{-\sqrt{C}t}), & (C > 0) \\ T_2 = B(e^{\sqrt{C}t} - e^{-\sqrt{C}t}) = 2iB\sin\sqrt{|C|}t. & (C < 0) \end{cases}$$

T_1 、 T_2 的主要区别在于系数 A 、 B , A 是实数而 B 为纯虚数, 以保证 T 的实数性。 A 、 B 之所以无法直接由理论决定, 是由于 $t = 0$ 时, \dot{T} 的初始条件难以决定。故应由实验确定。

T_1 、 T_2 的函数形式也不同。但在 t 很小的情况下, $T_{1,2} \propto \sqrt{|C|}t$, 这一简单的形式符合物理直觉, 但仍须由实验确证。而当 t 比较大的时候, 方程(13)中右边 T 的系数是周期的余弦函数, 表明了驻波场中原子运动情况的复杂性。

同时, T_1 、 T_2 皆可正可负, 对应于图 1 中的 ± 1 峰。这一点不难由(13)、(14)式看出。由总动量守恒, 易知峰 ± 1 处的原子获取了 $\hbar k|T|$ 的平均动量, 而峰 -1 处正相反, 为 $-\hbar k|T|$ 。因而可以由几何关系求出屏上峰 ± 1 的位置。

从物理上看, $\hbar kT$ 是几率平均意义上的动量转移, 而峰 ± 1 却表明原子到达这一点的几率最大, 是几率的峰值位置, 两者是不同的概念。这里指出: 对于峰 ± 1 较尖锐的情况, 两者的实际差别并不大。当然, 实验可以给出 $\hbar kT$ 的平均值, 由几率分布曲线可算出。但理论却不能由 $\hbar kT$ 给出几率分布曲线。

结 论 由于求解过程中采取了一系列近似, 使本模型的适用范围受到限制。好在相当大的一类实验基本满足这些条件, 并对于研制原子波干涉关系密切。由于解出的是平均值, 使这个模型显得较粗糙。但定性地看, 它已给出了实验所示各峰。定量的验证尚须由实验完成。

由于分别考虑了原子波函数 ψ 的动量部分和内部状态, 所以无法确定动量如何分配到上、下能级的原子上, 这是又一不足。

最后指出: 用 LLP 变换处理由真正单列行波组合成的光场预计将有更好的结果。因为单模场的量子布洛赫方程已经可以严格求解。

参 考 文 献

- [1] Y. Z. Wang, W. Q. Cai, Y. D. Cheng *et al.*, One-dimensional motion of slow atoms in a standing-wave field. *Phys. Rev. (A)*, 1990, 42(7): 4032~4036
- [2] P. J. Martin, B. G. Oldaker *et al.*, Bragg scattering of atoms from a standing light wave. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, 60(6): 515~518
- [3] E. Arimondo, A. Bambini, S. Stenholm, Quasiclassical theory of laser induced atomic-beam dispersion. *Phys. Rev. (A)*, 1981, 24(2): 898~909
- [4] S. Glasgow, P. Meystre, M. Wilkens *et al.*, Theory of an atomic beam splitter based on velocity-tuned resonances. *Phys. Rev. (A)*, 1991, 43(5): 2455~2463
- [5] M. Wilkens, E. Schumacher, Peystre, Band theory of a common model of atom optics. *Phys. Rev. (A)*, 1991, 44(5): 3130~3137
- [6] 李正中, 固体理论, 高等教育出版社, 1985, 第八章, 297~298

附 录^[6]

LLP 变换是 T. D. Lee, F. E. Low 和 D. Pines 首先用来处理极化子问题, 故名 LLP 变换。

考虑本文中的 H_T , 不难验证系统 x 方向总动量 $(P_x + \hbar k a_1^\dagger a_1 - \hbar k a_2^\dagger a_2)$ 是守恒量, 令其为 \tilde{P}_x . $[H_T, \tilde{P}_x] = 0$, 因而存在一表象变换, 使其中 P_x 算符成为 C 数。如 2.1 取变换 $U = \exp[-i(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)kx]$, 不难算出:

$$U^{-1}P_x U = \tilde{P}_x - \hbar k a_1^\dagger a_1 + \hbar k a_2^\dagger a_2,$$

$$U^{-1}a_\lambda U = a_\lambda \exp(-ik_\lambda x),$$

$$U^{-1}a_\lambda^\dagger U = a_\lambda^\dagger \exp(ik_\lambda x)$$

这里, $\lambda = 1, 2$, $k_1 = -k_2 = k$, \tilde{P}_x 是新表象中的动量算符, $\tilde{P}_x = (\hbar/i)\nabla_x$ 。但变换后新表象中哈密顿量已不含坐标 x , 故 $\tilde{P}_x = 0$ 。

为了从(2)式推出(3)式, 略去了高阶光子耦合项: $\sum_{\lambda, \lambda'} a_\lambda^\dagger a_{\lambda'}^\dagger a_\lambda a_{\lambda'}$, $\lambda, \lambda' = 1, 2$ 。这些项相当于微扰中的高阶修正, 除非光源强到有明显非线性效应, 否则影响相对是次要的。

Solution of Movement Equation of Two-Level Atoms Through Standing Wave Field

Cheng Ya Chen Jianwen

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

(Received 5 April 1994; revised 6 June 1994)

Abstract The Hamiltonian solution of two-level atoms interaction with standing light wave field is given by using a new method of LLP transformation in solid state physics. The result is important to the study on refraction phenomena of an atom beam passing through a standing light wave.

Key words standing light wave, two-stage atom.