第15卷 第2期
1995年2月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 15, No. 2
February, 1995

单模辐射场与 N 个原子相互作用理论

张登玉
(湖南衡阳师范专科学校物理系，衡阳 421008)

摘 要 用玻色算符的三维型哈密顿量描述单模辐射场与 N 个两能级原子的相互作用。在原子系统处于低能态、光子数很大的初始条件下，得到了作用系统的动力学变化规律。

关键词 单模辐射场， 原子， 相互作用。

1 引 言

在辐射与原子相互作用的研究中，常常使用的近似方法是认为辐射场只有一个角频率(把辐射场视为单模场)，且角频率与原子中的某一跃迁频率相等。若只考虑共振相互作用，原子可以简化成两能级模型，能级之间的跃迁频率与场的角频率相等。

Gambini 等曾用三维型哈密顿量描述参量转换、拉曼散射和布里渊散射[1~3]，但未涉及辐射场与两能级原子的作用。八十年代，Papadopoulos 研究单模辐射场与两个两能级原子的相互作用[4]，提供了一种求解场和原子相互作用的对称方法。但是用该方法求解辐射场与三个两能级原子相互作用时就显得非常复杂[5]，对辐射场与 N 个($N \gg 1$)原子相互作用问题无能为力。本文利用角动量算符表示法直接推导出三维型哈密顿量，根据海森堡运动方程，求解相互作用系统的动力学规律，并将计算结果与一些成熟的理论结果进行比较。从中可以看出：用三维型哈密顿量描述相互作用系统，比较成功地研究了单模辐射场与 N 个原子的相互作用。

2 相互作用系统的三维型哈密顿量

为简化起见，本文假定：原子为两能级模型，原子能级无限锐、没有线宽(无阻尼)，辐射场在相互作用过程中只存在能量转换而无能量损失，原子之间没有偶极相互作用。考虑单个两能级原子与单模辐射场共振相互作用，设场在 x 轴方向线性偏振，由于两能级原子在数学上等同于一个自旋为 1/2 的粒子，哈密顿量可以写成：

$$H_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega_3\sigma_z + \hbar\omega_3 a_3^{+}a_3 + \hbar g\left[a_3\exp(i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}) + a_3^{+}\exp(-i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})\right]\sigma_y, \qquad (1)$$

其中 ω_3 是场的角频率，也是原子的跃迁频率，a_3、a_3^{+} 是场的消灭算符和产生算符。$g =$

收稿日期：1993年10月29日；收到修改稿日期：1994年4月4日

$(2\pi\omega_3/\hbar V)^{1/2}d$，$d$ 为 x 轴方向原子偶极矩。对于 N 个相同的两能级原子，系统的哈密顿量为：

$$H = \hbar\left[\omega_3 J_z + \omega_3 a_3^+ a_3 + g(aJ_+ + a_3^+ J_-)\right], \tag{2}$$

其中

$$J_x = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\sigma_x)_i, \qquad J_y = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\sigma_y)_i, \qquad J_z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\sigma_z)_i$$

$$[J_k, J_y] = iJ_z, \qquad J_\pm = J_x \pm J_y.$$

利用 Schwinger 的角动量算符表示法[6]，得到

$$\left.\begin{aligned} J_+ &= a_1^+ a_2, \qquad J_- = a_1 a_2^+ \\ J_z &= \frac{1}{2}(a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

在上式中，a_1、a_1^+ 和 a_2、a_2^+ 是玻色算符。a_1、a_1^+ 是处于高能级的原子的消灭算符和产生算符，a_2、a_2^+ 是处于低能级的原子的消灭算符和产生算符。粒子数算符 $N_1 = a_1^+ a_1$ 和 $N_2 = a_2^+ a_2$ 分别代表高能态和低能态的原子的数目。将(3)式代入(2)式，得到三维型哈密顿量为：

$$\begin{aligned} H = \hbar\,[&\omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2 + \omega_3 a_3^+ a_3 \\ &+ g(a_1^+ a_2 a_3 + a_1 a_2^+ a_3^+)], \end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$\omega_3 = 2\omega_1 = -2\omega_2$$

3　海森堡运动方程

力学量 $F(t)$ 的海森堡运动方程为：

$$i\hbar\frac{dF}{dt} = [F, H]. \tag{5}$$

对于(4)式的哈密顿量，消灭算符 $a_i(t)\,(i = 1,2,3)$ 满足：

$$\left.\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= -i\omega_1 a_1 - iga_2 a_3, \\ \frac{da_2}{dt} &= -i\omega_2 a_2 - iga_1 a_3^+, \\ \frac{da_3}{dt} &= -i\omega_3 a_3 - iga_1 a_2^+. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

算符 $a_i(t)$ 可表示为：

$$a_i(t) = U^+(t)\,a_i(0)U(t) \tag{7}$$

其中

$$U(t) = \exp\{-igt[a_1^+(0)a_2(0)a_3(0) + a_1(0)a_2^+(0)a_3^+(0)]\}$$

利用(4)和(5)两式，得到算符 $N_i(t)$ 满足的运动方程为：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= ig(a_1^+ a_2 a_3 - a_1 a_2^+ a_3) \\ \frac{dN_2}{dt} &= \frac{dN_3}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由微分方程组(6)式和(8)式，得到方程

$$\frac{d^2N_3}{dt^2}=-2g^2[3N_3^2-(4M-2N-1)N_3+M(M-N-1)],\tag{9}$$

式中

$$N=N_1+N_2,\qquad M=N_1+N_3,$$

算符 N 代表原子的总数目，它是运动常量。M 代表光子数与激发态原子数目之和，它在吸收和发射过程中也是一个不变量。可以证明，如果满足

$$\left|\frac{\langle N_3^2\rangle-\langle N_3\rangle^2}{\langle N_3\rangle^2}\right|\ll 1,\tag{10}$$

并且在相互作用时间里辐射场中的光子数很大，即

$$N_3(t)\gg 1,\tag{11}$$

那么(9)式就能简化成常系数二阶微分方程。

4 相互作用系统的动力学规律

4.1 辐射场中的光子数随时间的变化规律

设初始状态为：原子系统处于低能态，辐射场很强(即光子数目远大于 1)。系统初态的数学表述为：

$$N_{10}=0,\qquad N_{20}=N,\qquad N_{30}=M\gg 1,\tag{12}$$

并且

$$\left(\frac{dN_3}{dt}\right)_{t=0}=0,\tag{13}$$

(10)式和(11)式成立时，得到

$$\frac{d^2N_3}{dt^2}=-2g^2[3N_3^2-(4M-2N-1)N_3+M(M-N-1)].\tag{14}$$

对上式积分一次，得

$$\left(\frac{dN_3}{dt}\right)^2=-4g^2(N_3-N_{30})(N_3-\beta_1)(N_3-\beta_2).\tag{15}$$

式中 β_1、$\beta_2(\beta_1>\beta_2)$ 是二次方程

$$y^2-(2M-N-N_{30}-\frac{1}{2})y+(M-N_{30})(M-N-1-N_{30})-\frac{1}{2}N_{30}=0\tag{16}$$

的根。(15)式类似于球状摆的运动方程，根据雅可比椭圆函数可以得到 $N_3(t)$ 的表达式。由于有 $N_{30}>\beta_1$ 和 $N_{30}<\beta_1$ 两种可能性，因此方程解的一般形式为

$$N_3(t)=N_{30}-(N_{30}-\beta_1)\,\mathrm{sn}^2\left[(N_{30}-\beta_2)^{1/2}gt,\frac{N_{30}-\beta_1}{N_{30}-\beta_2}\right],\qquad \beta_1<N_{30}\tag{17a}$$

$$N_3(t)=\beta_2+(N_{30}-\beta_2)\,\mathrm{nd}^2\left[(\beta_1-\beta_2)^{1/2}gt,\frac{\beta_1-N_{30}}{\beta_1-\beta_2}\right],\qquad \beta_1>N_{30}\tag{17b}$$

式中 $\mathrm{nd}(u,m)$ 和 $\mathrm{sn}(u,m)$ 是雅可比椭圆函数[7]。

当 $M>N\gg 1(N_{30}>N_{20}\gg 1)$，从(17)式得到辐射场中的光子数随时间变化规律为：

$$N_3(t)=M-(M-\beta_1)\,\mathrm{sn}^2\left[(M-\beta_2)^{1/2}gt,\frac{M-\beta_1}{M-\beta_2}\right].\tag{18}$$

4.2 a_1 和 a_2 的动力学规律

由于 $N_3(t)$ 远大于 1，根据对应原理，a_3 和 a_3^+ 可视为一般数性函数，即：

$$\left.\begin{aligned} a_3(t) &\to a_3(t) = [N_3(t)]^{1/2}\exp(-i\omega_3 t), \\ a_3^+(t) &\to a_3^*(t) = [N_3(t)]^{1/2}\exp(i\omega_3 t). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

则 a_1 和 a_2 的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= -i\omega_1 a_1 - ig[N_3(t)]^{1/2}a_2\exp(-i\omega_3 t), \\ \frac{da_2}{dt} &= -i\omega_2 a_2 - ig[N_3(t)]^{1/2}a_1\exp(i\omega_3 t). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

算符方程(20)式可以精确求解

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \exp(-i\omega_1 t)\,[a_1(0)\cos\theta(t) - ia_2(0)\sin\theta(t)] \\ a_2(t) &= \exp(-i\omega_2 t)\,[a_2(0)\cos\theta(t) - ia_1(0)\sin\theta(t)] \end{aligned} \tag{21}$$

式中 $\theta(t) = g\int_0^t [N_3(t')]^{1/2}dt'$.

5 讨　论

1)　如果在(15)式中，$\beta_1 = N_{30}$，则(17a)和(17b)两式有相同结果，得到稳定解为：

$$N_3(t) = N_{30}.$$

上式表示系统总是处在稳定平衡态。这个稳定解不满足自洽要求。因此，近似求解法不适用 $\beta_1 = N_{30}$ 这种特殊情况。

2)　以单模辐射场与一个两能级原子共振相互作用为例来检验本文理论研究的可靠性。设初始时原子处于低能态，则 $N_{10} = 0$，$N = N_{20} = 1$，$N_{30} \approx M \gg 1$。利用(17a)和(21)两式得

$$\begin{aligned} N_3(t) &\approx N_{30} - \sin^2(\sqrt{N_{30}}\,gt), \\ N_2(t) &\approx \cos^2(\sqrt{N_{30}}\,gt), \\ N_1(t) &\approx \sin^2(\sqrt{N_{30}}\,gt). \end{aligned}$$

上式与其他一些理论的研究结果是一致的[8~11]。$N_2(t)$ 或 $N_1(t)$ 的表达式的物理意义可理解为单个原子在相互作用过程中处于低能态的几率或处于高能态的几率。几率之和为 1。

3)　当 $N_{10} = 0$、$N = N_{20}$ 较小(比如 $N = 2$、3)，而 $N_{30} \approx M \gg 1$，此时(17a)式可近似表示为

$$N_3(t) \approx N_{30} - (N_{30} - \beta_1)\left[\sin u - \frac{1}{4}m(u - \sin u\cos u)\cos u\right]^2,$$

式中 $u = (N_{30} - \beta_2)^{1/2}gt$，$m = \dfrac{(N_{30} - \beta_1)}{N_{30} - \beta_2}$，$\beta_1$、$\beta_2$ 由(16)式给出。

4)　从 2)、3)以及(17)、(21)两式可以看出；单模辐射场与 N 个原子相互作用时，光场和原子的状态都会发生变化。光场是时间的振荡函数，振荡周期与初始时的光子数、初始时原子状态、共振频率、原子偶极矩以及作用腔的体积等因素有关。

本文得到核工业总公司于长江研究员的指导，在此谨表谢意。

参 考 文 献

[1] R. Gambini, Quantum properties in trilinear optical processes. *Phys. Rev.* (*A*), 1977, **15**(6): 1157～1165
[2] J. Perina, Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena, Reidel, Dordrecht, 1984
[3] B. R. Mollow, R. J. Glauber, The problem of trilinear Raman scattering. *Phys. Rev.*, 1967, **160**(8): 1076～1085
[4] Papadopoulos G. J., Interaction of radiation with atoms. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, **13**(5): 1423～1432
[5] 张登玉, 激光场与三个两能级原子相互作用. 衡阳师专学报, 1992, **10**(1): 11～16
[6] J. Schwinger, L. C. Biederharn, *Quantum Theory of Angular Momentum*, Academic, New York, 1965
[7] M. Abramowitz, I. A. Segum, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965: 569～581
[8] F. W. Cummings, The stimulated emission from a single excited two-level atom. *Phys. Rev.* (*A*), 1965, **140**(10): 1051～1056
[9] W. H. 路易塞尔著, 陈水译; 辐射的量子统计性质. 北京, 科学出版社, 1982: 380～387
[10] 李福利, 高等激光物理学. 合肥, 中国科技大学出版社, 1992: 328～336
[11] 张登玉, 激光场与两能级原子相互作用的全量子理论分析. 激光杂志, 1993, **14**(4): 185～190

Theory of a Single-Mode Radiation Field Interaction with N Atoms

Zhang Dengyu
(*Physics Department, Heng Yang Teachers' College, Hengyang* 421008)
(Received 29 October 1993; revised 4 April 1994)

Abstract The interaction of a single-mode radiation field with N two-level atoms is described by a Hamiltonian trilinear in the boson operators. For an atomic system initially in ground state, it is shown that the dynamics of the system can be approached exatly when the number of photons are very large.
Key words single-mode radiation field, atom, interaction.