

衍射光学元件的解析分析方法*

王润文 叶超

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 从波动光学传播的非涅尔(Fresnel)衍射出发, 探讨一次光学转换形成任意要求的图形的问题。导得两平行传播平面间的函数关系, 从而在确定像面分布的条件下可以逆求出原始面(衍射光学元件)的振幅与位相分布。文中给出了几个实例, 充分表明这是有实用价值的一种衍射光学元件设计方法。

关键词 衍射光学元件, 傅里叶变换, 物函数, 变迹膜。

1 引 言

随着光学微细加工技术的发展, 人们对衍射光学元件的物理设计与成形方法进行了多种途径的探索研究^[1~7]。它有可能实现传统光学元件所不能解决的光学任意图形间变换问题。传统的几何成像都是建立在物像相似形的关系上, 而且物像面之间存在成像的光学系统。然而有没有可能使一束平行光束通过衍射光学元件后, 经过空间传播到另一平面就能形成所要求的像形呢? 作者曾在文献[6]中提出了这个问题的逻辑思路, Golab 等人曾从程函原理出发也研究过这个问题^[8], 但由于理论模型过于简化, 所得图形较为粗糙。随着衍射光学的发展, 一次光学转换形成所要求的图形的问题已成为当前成像光学理论与实践研究工作的对象之一。本文从波动光学传播的非涅尔衍射出发, 导出两平行传播平面的物像函数关系, 在确定像面分布的情况下可以逆求在原始物面(衍射光学元件)上传播出的波的振幅与位相分布, 以进行衍射光学元件的设计和计算。当然, 这样的衍射光学元件的实现还有待技术上的开拓。

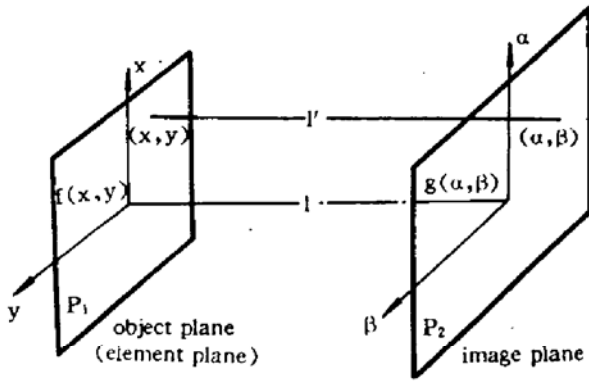
2 光在两平行面间的传播关系

正如图 1 所示, (x, y) 平面与 (α, β) 平面平行, 两原点连线垂直于两平面, 两平面相距 l , 现定义原始平面 P_1 为物平面, 传播终止平面 P_2 为像平面。设物函数为 $f(x, y)$, 其含义是一束垂直透过 P_1 平面入射的均匀平面波变成波面振幅与位相分布由 $f(x, y)$ 来表示。同样定义 $g(\alpha, \beta)$ 为像函数, 即光束传播至 P_2 平面的振幅与位相分布, 显然, 像的强度分布为 $|g(\alpha, \beta)|^2$ 。这里仍然把两平面距离看作较物像的尺度大得多。就可以导得下面的关系式^[6];

* 上海市科委自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1995年7月20日; 收到修改稿日期: 1995年9月5日

$$g(\alpha, \beta) = C \exp(ikl) \exp [ik(\alpha^2 + \beta^2)/2l] \iint f(x, y) \exp [ik(x^2 + y^2)/2l] \exp [-ik(\alpha x + \beta y)/l] dx dy \quad (1)$$



其中 $C = i/\lambda$ ，若作如下变量变换：

$$\bar{\alpha} = \alpha / \sqrt{l\lambda}, \quad \bar{\beta} = \beta / \sqrt{l\lambda}, \quad \bar{x} = x / \sqrt{l\lambda}, \quad \bar{y} = y / \sqrt{l\lambda}, \quad c_1 = cl\lambda \quad (2)$$

于是(1)式变成

$$g(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) e^{-i\pi(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)} = c_1 e^{ikl} \iint f(\bar{x}, \bar{y}) \exp [i\pi(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)] \exp [-i2\pi(\bar{\alpha}\bar{x} + \bar{\beta}\bar{y})] d\bar{x} d\bar{y} \quad (3)$$

即两边的函数互为两维的傅里叶变换及逆傅里叶变换的关系。因此，由已知的像函数分布就可通过逆傅里叶变换来确定衍射光学元件的分布函数，即：

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{c_1} e^{-ikl} e^{-i\pi(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)} \iint g(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) e^{-i\pi(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)} e^{i2\pi(\bar{\alpha}\bar{x} + \bar{\beta}\bar{y})} d\bar{\alpha} d\bar{\beta} \quad (4)$$

这就是衍射光学元件解析分析的基本关系式^[6]。若令

$$\left. \begin{aligned} G(\alpha, \beta) &= g(\alpha, \beta) e^{-ikl} e^{-i\frac{1}{2l}(\alpha^2 + \beta^2)} \\ F(x, y) &= f(x, y) e^{i\frac{1}{2l}(x^2 + y^2)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

利用(2)式、(5)式代入(4)式后便有

$$G(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = c_1 \iint F(\bar{x}, \bar{y}) e^{-i2\pi(\bar{\alpha}\bar{x} + \bar{\beta}\bar{y})} d\bar{x} d\bar{y} \quad (6)$$

这是更为简洁的物像二维傅里叶变换关系，考虑到通常的光学系统是圆柱对称的，将 (x, y) 及 (α, β) 坐标分别用 (r, θ) 及 (ρ, φ) 极坐标来表示，并假设： $\bar{r} = r / \sqrt{l\lambda}$ ， $\bar{\rho} = \rho / \sqrt{l\lambda}$ 则有

$$\bar{x} = \bar{r} \cos \theta, \quad \bar{y} = \bar{r} \sin \theta, \quad \bar{\alpha} = \bar{\rho} \cos \varphi, \quad \bar{\beta} = \bar{\rho} \sin \varphi \quad (7)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

于是(6)式就可写成： $G(\bar{\rho}, \varphi) = C_1 \iint F(\bar{r}, \theta) e^{-i2\pi\bar{\rho}\bar{r}\cos(\theta-\varphi)} \bar{r} d\bar{r} d\theta$ (8)

其傅里叶逆变换为： $F(\bar{r}, \theta) = \frac{1}{C_1} \iint G(\bar{\rho}, \varphi) e^{i2\pi\bar{\rho}\bar{r}\cos(\theta-\varphi)} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\varphi$ (9)

再由(6)式就决定了物函数 $f(\bar{r}, \theta) = F(\bar{r}, \theta) e^{-i\pi\bar{r}^2}$ (10)

当像函数 $G(\bar{\rho}, \varphi) \equiv G(\bar{\rho})$ 时亦即在圆形轴对称情况下，应用贝塞尔函数恒等式

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm i a \cos(\theta-\varphi)} d\theta = 2\pi J_0(a) \quad (11)$$

则(10)、(11)式两维傅里叶变换便过渡到零阶汉克尔(Hankel)变换：

$$G(\bar{\rho}) = C_1 \iint F(\bar{r}) J_0(2\pi\bar{\rho}\bar{r}) \bar{r} d\bar{r} \quad (12)$$

$$F(\bar{r}) = \frac{1}{C_1} \iint G(\bar{\rho}) J_0(2\pi\bar{\rho}\bar{r}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \quad (13)$$

(12)、(13)式表明，当像是圆形对称分布的情况，物函数也将是圆形轴对称分布。

3 平行光成圆环像的情况

这时像函数为圆形轴对称分布的情况，可应用(12)、(13)式来分析计算。假设像是中心圆环形像，半径为 $\bar{\rho}_0$ ，则

$$\left. \begin{aligned} G(\bar{\rho}) &= \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) \\ F(\bar{r}) &= \frac{1}{C_1} \iint \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) J_0(2\pi\bar{\rho}\bar{r}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \\ &= \frac{1}{C_1} \bar{\rho}_0 J_0(2\pi\bar{\rho}_0\bar{r}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

利用(14)式和(10)式就可决定物函数分布，可表示为

$$f(r, \theta) = F(r, \theta) e^{-\frac{ikr^2}{2l}} \quad (15)$$

(15) 式表明，振幅函数是复盖在焦距 $f \equiv l$ 的透镜表面的，只要满足 $F(\bar{r}, \theta)$ [或 $F(r, \theta)$] 振幅函数就可获得在 P_2 表面 $\rho = \bar{\rho} \sqrt{f\lambda}$ 为半径的圆环形像。

考虑(14)式中 $J_0(2\pi\bar{\rho}_0\bar{r})$ 因子的变化趋势。从贝塞尔函数图形可知，当 $2\pi\bar{\rho}_0\bar{r} = 2.40, 5.50, 8.65, 11.79, 14.93 \dots$ 时为其零点，在 $(2.40, 5.50), (8.65, 11.79) \dots$ 的区间， J_0 的函数值是负值，因此相应这一 r 值的区间要附加 π 位相的变化，整个结构如图 2 所示。

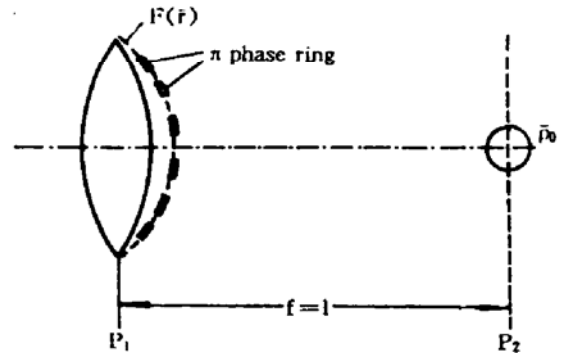


Fig. 2 Illustrating the addition of π -phase coating ring on the optical element plane

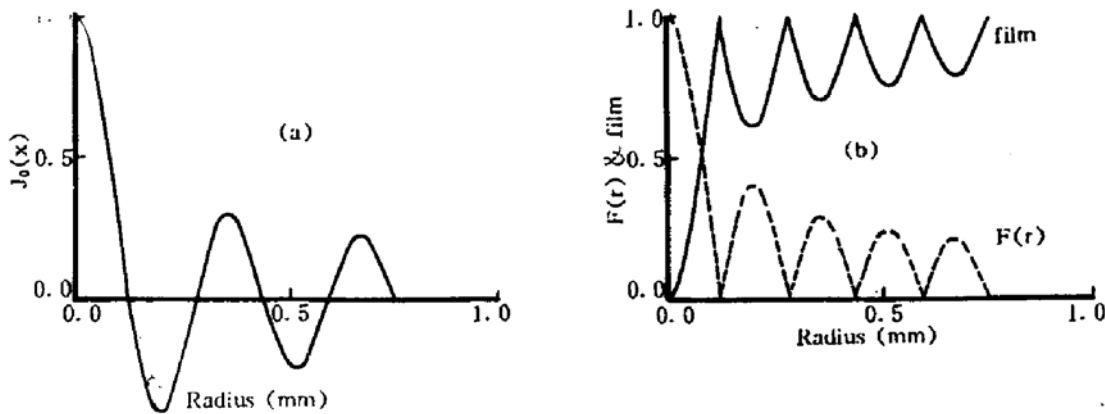


Fig. 3 (a) Bessel function $J_0(r)$

(b) Dashed line: amplitude function curve $F(x, y)$ of the element plane with the addition of π -phase coating ring to form the circle pattern.

Solid line: absorption coating distribution on the element plane to form the circle pattern

下面作为数值例子，可选择如下参数： $2\pi\bar{\rho}_0\bar{r}_0 \leq 200, f = 500 \text{ mm}, \lambda = 0.6328 \mu\text{m}, \rho_0 = 1 \text{ mm}$ ，则 $r_{max} \approx 11 \text{ mm}$ 。相应地在下列环带 $(0.11, 0.25), (0.4, 0.55), \dots$ 复盖一层 π 位相膜，其 $F(r, \theta)$ 及吸收膜层的图形如图 3 所示。图 3(a) 为零阶贝塞尔函数曲线，亦即透过元件后物波的分布函数，图 3(b) 中的虚线为将负值部份变换为正值的曲线，而实线则为衍射光学元件所满足的透过率条件，在负值区上涂上 π 位相膜的吸收膜层的分布，如图 2 所示。值得说明的是，被吸收膜复盖的 $f = l$ 的球面系统是可以纯位相衍射元件来完成的^[9]，这样就是

结合了位相结构与变迹膜的衍射光学元件。

4 一次成点阵像的情况

若要在 P_2 平面上以半径 ρ_1, ρ_2, \dots 的环线上每隔 $\varphi_0 = 2\pi/N$ 有一像点, 则像的分布函数可表示为:

$$\begin{aligned}
 G(\bar{\rho}, \varphi) &= \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}_1)\delta(\varphi - \varphi_0) + \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}_1)\delta(\varphi - 2\varphi_0) + \dots \\
 &+ \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}_2)\delta(\varphi - \varphi_0) + \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}_2)\delta(\varphi - 2\varphi_0) + \dots + \dots \\
 &+ \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}_N)\delta(\varphi - \varphi_0) + \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}_N)\delta(\varphi - 2\varphi_0) + \dots \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}_i)\delta(\varphi - j\varphi_0) \tag{16}
 \end{aligned}$$

这时(9)式变成

$$F(\bar{r}, \theta) = \frac{1}{C_1} \iint \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta(\rho - \rho_i)\delta(\varphi - j\varphi_0) \right] e^{i2\bar{r}\rho \cos(\theta - \varphi)} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\varphi \tag{17}$$

为简单起见, 先看第一环带 (即 $i = 1$) 上像点对应的物函数 $f(\bar{\rho}, \theta)$,

$$\begin{aligned}
 F(\bar{r}, \theta) &= \frac{1}{C_1} \iint \left[\sum_{j=1}^N \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}_1)\delta(\varphi - j\varphi_0) \right] e^{i2\bar{r}\bar{\rho} \cos(\theta - \varphi)} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\varphi \\
 &= \frac{1}{C_1} \left[\bar{\rho}_1 e^{i2\pi\bar{\rho}_1 r \cos(\theta - \varphi_0)} + \bar{\rho}_1 e^{i2\pi\bar{\rho}_1 r \cos(\theta - 2\varphi_0)} + \dots + \bar{\rho}_1 e^{i2\pi\bar{\rho}_1 r \cos(\theta - N\varphi_0)} \right] \tag{18}
 \end{aligned}$$

用(7)式代入则得:

$$F(r, \theta) = C_1 \left[\frac{\rho_1}{\sqrt{l\lambda}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\rho_1 r \cos(\theta - \varphi_0)} + \frac{\rho_1}{\sqrt{l\lambda}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\rho_1 r \cos(\theta - 2\varphi_0)} + \dots + \frac{\rho_1}{\sqrt{l\lambda}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\rho_1 r \cos(\theta - N\varphi_0)} \right] \tag{19}$$

由(18)与(10)式就决定了物函数分布 $f(r, \theta)$ 。下面分几种情况来讨论:

4.1 成单点像在 (ρ_0, φ_0) 上

这时, 便有

$$f(r, \theta) = C_1 \frac{\rho_0}{\sqrt{l\lambda}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[\rho_0 r \cos(\theta - \varphi_0) - \frac{r^2}{2}]} \tag{20}$$

显然, 元件为一维纯位相分布, 等位相线的对称中心在 (ρ_0, φ_0) 的位置。若选取 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$, $l = 500 \text{ mm}$, 像点角度 $\varphi_0 = \pi/4$ 的位置。像点距中心 1.5 mm , 则其等位相线分布如图 4 所示。为一群偏心圆族。

4.2 成对称双点像

假定对称双点像在 $(\rho_0, 0)$ 和 (ρ_0, π) 的位置, 则(19)式变成

$$\begin{aligned}
 F(r, \theta) &= \frac{C_1 \rho_0}{\sqrt{l\lambda}} \left[e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\rho_0 r \cos \theta} + e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\rho_0 r \cos(\theta - \pi)} \right] \\
 &= \frac{2C_1}{\sqrt{l\lambda}} \rho_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \rho_0 r \cos \theta \right] \tag{21}
 \end{aligned}$$

再由(12)式可得物函数 $f(\rho, \theta)$ 。

显然, 这时 P_1 面就是振幅位相型补偿元件, 其厚度补偿与 r^2 有关, 即凸透镜形状的元件上涂上膜层(吸收层), 即可获得对称双点像。其膜层的分布情况由(21)式决定。为使物函数简单化, 则设计参数的要求为:

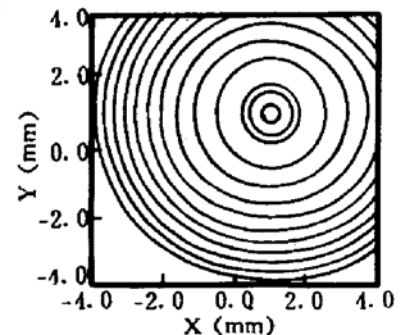


Fig. 4 Equi-phase distribution to form single point-image at (x_0, y_0)

$$\rho_0 r_0 / (\lambda) \leq 1 \tag{22}$$

这里 r_0 为元件半径，如果选取 $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$, $f = 3 \text{ m}$, $r_0 = 5 \text{ mm}$, $\rho_0 = 1 \text{ mm}$ ，则其 $F(x, y)$ 及吸收膜层的图形分别如图 5(a) 和图 5(b) 所示。吸收膜层的分布要求中间薄边缘厚，且以 x 轴为对称轴。

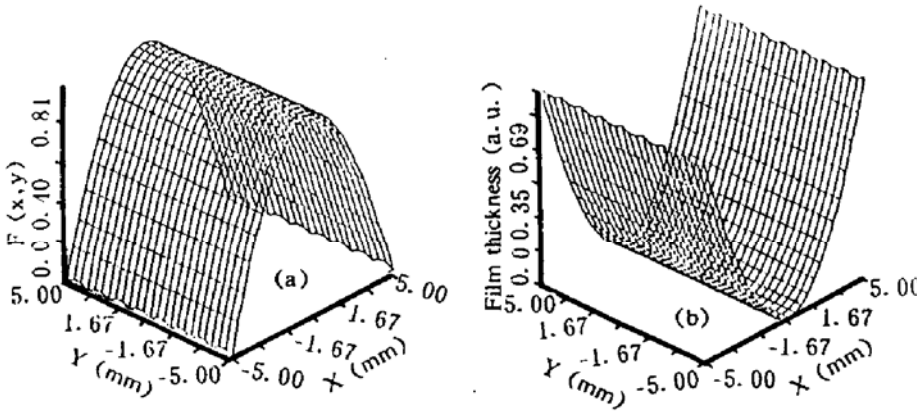


Fig. 5 (a) amplitude function curve $F(x, y)$ to form the symmetrical double point-image
 (b) absorption coating distribution to form the symmetrical double point-image

如果对称双点像各自转过 $\pi/4$ ，即像在 $(\rho_0, \pi/4)$ 和 $(\rho_0, 5/4\pi)$ 的位置，则其吸收膜层也是中间薄边缘厚，只是等厚膜层的对称线转过了 $\pi/4$ 。

4.3 成 16 点对称矩阵像

如果像为图 6(a) 所示的 16 点矩阵像，则(17)式变成

$$F(r, \theta) = \frac{2C_1}{\sqrt{l\lambda}} \{ \rho_1 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \rho_1 r \cos(\theta - \varphi_1) \right] + \rho_2 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \rho_2 r \cos(\theta - \varphi_2) \right] + \dots + \rho_7 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \rho_7 r \cos(\theta - \varphi_7) \right] + \rho_8 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \rho_8 r \cos(\theta - \varphi_8) \right] \} \tag{23}$$

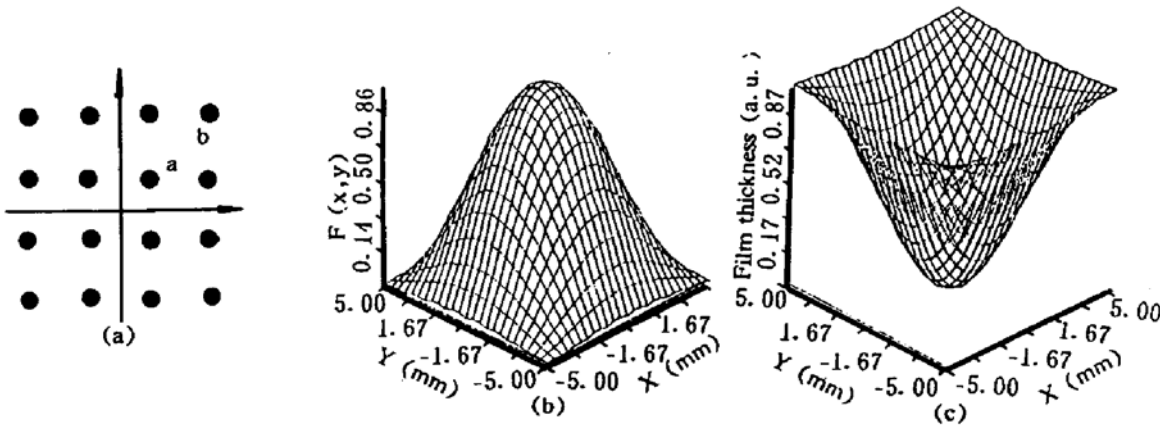


Fig. 6 (a) Required image pattern
 (b) amplitude function curve $F(x, y)$ to form the symmetrical 16-points image shown in (a)
 (c) absorption coating distribution to form the image pattern shown in (a)

每二个对称点为一项，8 对对称像点即由 8 项相加组成。同样，这也是振幅位相型补偿元件，即在凸透镜形状的元件上再涂上膜层便可获得这种矩阵点像。吸收膜层的分布情况由(23)式决定。只要满足设计参数 $\rho r / \lambda < 1$ ，可以得到较为简单化的物函数。若选取同上述相同的参数，即 $l = f = 3 \text{ m}$, $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$, $r_{\text{max}} = 5 \text{ mm}$, $\rho_a = 1 \text{ mm}$, $\rho_b = 3 \text{ mm}$ (此时每项满足 $\rho r / \lambda < 1$)，则其 $F(x, y)$ 及吸收膜层的分布情况分别如图 6(b) 和 6(c) 所示。从图 6(c) 可见，膜层也是

中间薄边缘厚, 吸收膜层以元件中心为对称中心呈方对称。

结 论 从波动光学的衍射原理出发, 导得两平行传播平面间的函数关系, 从而在确定像面分布的条件下可以从逆变换导出原始面的振幅与位相分布。通过一次光学转换, 可形成任意要求的像形, 这是一种有实用价值的衍射光学元件的设计方法。本文对实现圆环, 点阵的圆形的衍射光学元件作了计算, 然而这一计算方法具有更一般性的意义, 即可用于更复杂高形的设计计算。当然, 这种元件的实现有待于技术上的开拓。

参 考 文 献

- [1] Alan Kathman, Eric Johnson, Binary optics—new diffractive elements for the designer's tool kit. *Photonics Spectra*, 1992, 28(9): 125~132
- [2] Greg Behrmann, John Bowen, A hybrid approach open door for diffractive optics. *Photonics Spectra*, 1993, 27(5): 159~170
- [3] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt. Jr., M. P. Vecchi, Optimization by simulated annealing. *Science*, 1983, 220(4598): 671~680
- [4] U. Mahlab, J. Shamir, H. J. Caulfield, Genetic algorithm for optical pattern recognition. *Opt. Lett.*, 1991, 16(12): 648
- [5] T. Yatagai, M. Geiser, R. Tian *et al.*, CAD system for CGH and laser beam lithography. *Proc. SPIE*, 1991, 1555: 8~12
- [6] 王润文, 叶超, 衍射光学元件及微光学技术. *光子学报*, 1994, 23(Z2): 33~42
- [7] 王润文, 叶超, 光学共形映照. *中国激光*, 1994, 21(5): 389~402
- [8] M. A. Golab, I. N. Sisakyan, V. A. Soifer, Infra radiation facusators. *Optics & Laser in Engineering*, 1991, 15(199): 297~309
- [9] 王润文, 叶超, 一维纯位相线成像衍射光学元件的计算. *光学学报*, 1994, 14(9): 897~902

A New Analytical Method of Diffractive Optical Element

Wang Runwen Ye Chao

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics Academia Sinica, Shanghai 201800)

(Received 20 July 1995; revised 5 September 1995)

Abstract A new type of optical conformal transformation to form a given image pattern was suggested. The functional relationship of the propagation between two parallel planes, element plane and image plane, was derived from diffraction principle, so that the distribution of the amplitude and phase on the original objective plane may be determined by the given image-plane distribution. Several examples shown in this paper indicate that it is a valuable design method of the diffraction optical element.

Key words diffraction optical element, fourier transform, objective function, apodization coating.