

压缩迭加态及其特性

董传华 缪连元

(上海工业大学基础部, 上海 200072)

摘 要 压缩迭加态是由迭加态通过压缩系统后产生的一种辐射场非经典态。这种态具备了 Wigner 相空间压缩和相干迭加压缩两种机制。详细讨论了这种压缩迭加态的量子统计性质及压缩特性。

关键词 压缩, 迭加态。

1 引 言

压缩相干态是相干态通过一个压缩系统(如参量放大器)的作用而产生的一种非经典光场^[1, 2]。压缩作用可以用一个压缩算符 $S(\zeta)$ 表示:

$$S(\zeta) = \exp \left[\frac{1}{2} (\zeta^* a^2 - \zeta a^{+2}) \right]. \quad (1)$$

其中 ζ 是一个复的压缩参量, $\zeta = s \exp(i\theta)$ 。这种压缩在本质上是对 Wigner 相空间的压缩, 是对真空态或相干态的正则变换。而光子数态通过压缩系统后就是压缩光子数态。

另外, 光子数迭加态(以后简称迭加态)是由光子数态的量子迭加而得, 定义为^[3]:

$$|\psi\rangle_{mn} = C_m |m\rangle + C_n |n\rangle. \quad (2)$$

其中 C_m 、 C_n 是 $|m\rangle$ 及 $|n\rangle$ 态被激发的几率振幅, 它们是两个复数, 相位差为 ϕ , 且满足条件 $|C_m|^2 + |C_n|^2 = 1$ 。这种迭加态在某些情况下也表现出压缩特性, 但这种压缩起源于迭加时表现出的相干效应。因此产生压缩的两条途径是: Wigner 相空间的压缩形变和量子迭加过程中的量子相干。在本文中, 把这两种机制结合起来, 即辐射场的初态是迭加态, 它经过压缩系统后产生的态称之为压缩迭加态, 定义为

$$|\psi\rangle_{mnc} = S(\zeta) |\psi\rangle_{mn}. \quad (3)$$

这里提出的这种压缩迭加态是一种新的辐射场态, 它既不同于 Wódkiewicz 等人的迭加态^[3], 也不同于 Kim 等人的压缩光子数态^[4]。在压缩迭加态中, 两种压缩机制相互竞争, 结果可能使压缩增强, 也可能使压缩减弱。

2 压缩迭加态的量子统计性质

在压缩迭加态中, 光子数的平均值为:

$$\langle N \rangle_{mnc} = |C_m|^2 \langle N \rangle_{m\zeta} + |C_n|^2 \langle N \rangle_{n\zeta} - |C_m C_n| \sqrt{n(n-1)} \operatorname{sh}(2s) \cos(\phi - \theta) \delta_{J,2}. \quad (4)$$

其中 $J \equiv n - m$, ($n > m$)。 $\langle N \rangle_{m\zeta}$ 、 $\langle N \rangle_{n\zeta}$ 分别为压缩光子数态 $S|m\rangle$ 和 $S|n\rangle$ 中光子数的平均值。压缩迭加态也可以看作是压缩光子数态的迭加, 而(4)式中第三项就是迭加时产生的相干项。后面还会看到这一点。 $\langle N \rangle_{m\zeta}$ 、 $\langle N \rangle_{n\zeta}$ 为:

$$\langle N \rangle_{m\zeta} = m \operatorname{ch}(2s) + \operatorname{sh}^2 s, \quad \langle N \rangle_{n\zeta} = n \operatorname{ch}(2s) + \operatorname{sh}^2 s. \quad (5)$$

在压缩迭加态中, 还得到

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle_{mnc} &= |C_m|^2 \langle N^2 \rangle_{m\zeta} + |C_n|^2 \langle N^2 \rangle_{n\zeta} \\ &+ |C_m C_n| \operatorname{sh}(2s) \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{n^{(4)}} \operatorname{sh}(2s) \cos(2\phi - \theta) \delta_{J,4} \right. \\ &\left. - 2 \sqrt{n^{(2)}} [n \operatorname{ch}(2s) - \operatorname{ch}^2 s] \cos(\phi - \theta) \delta_{J,2} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\langle N^2 \rangle_{m\zeta}$ 和 $\langle N^2 \rangle_{n\zeta}$ 分别是 N^2 在压缩光子数态 $S|m\rangle$ 和 $S|n\rangle$ 中的平均值。例如:

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle_{m\zeta} &= [\operatorname{ch}^2(2s) + \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2(2s)] m^2 + 2 \operatorname{sh}^2 s (\operatorname{sh}^2 s + 2 \operatorname{ch}^2 s) m \\ &+ \operatorname{sh}^2 s (\operatorname{sh}^2 s + 2 \operatorname{ch}^2 s). \end{aligned} \quad (7)$$

(6)式中 $n^{(r)} \equiv r! / (n-r)!$ 。利用(4)、(6)式可以计算光子数的涨落。这涨落在 $J \neq 2, 4$ 的情况下比较简单, 为:

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle_{mnc} = |C_m|^2 \langle (\Delta N)^2 \rangle_{m\zeta} + |C_n|^2 \langle (\Delta N)^2 \rangle_{n\zeta} + J^2 |C_m C_n|^2 \operatorname{ch}^2(2s). \quad (8)$$

其中 $\langle (\Delta N)^2 \rangle_{m\zeta}$ 和 $\langle (\Delta N)^2 \rangle_{n\zeta}$ 是压缩光子数态中光子数涨落,

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle_{m\zeta} = \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2(2s) (m^2 + m + 1) \quad (9)$$

当 $s = 0$, (4)式及(8)式就简化为单纯的迭加态[见(2)式]中的光子数平均值及光子数涨落, 即为:

$$\langle N \rangle_{mn} = |C_m|^2 m + |C_n|^2 n, \quad \langle (\Delta N)^2 \rangle_{mn} = |C_m C_n|^2 J^2. \quad (10)$$

在 $J \neq 2, 4$ 的情况下, 压缩迭加态的二阶相关函数为

$$g_{mnc}^{(2)}(0) = [|C_m|^2 \langle N \rangle_{m\zeta}^2 g_{m\zeta}^{(2)}(0) + |C_n|^2 \langle N \rangle_{n\zeta}^2 g_{n\zeta}^{(2)}(0)] / \langle N \rangle_{mnc}^2. \quad (11)$$

其中 $g_{m\zeta}^{(2)}(0)$ 及 $g_{n\zeta}^{(2)}(0)$ 分别是压缩光子数态 $S|m\rangle$ 及 $S|n\rangle$ 的二阶相关函数。例如 $g_{m\zeta}^{(2)}(0)$ 为:

$$g_{m\zeta}^{(2)}(0) = (\langle N^2 \rangle_{m\zeta} - \langle N \rangle_{m\zeta}^2) / \langle N \rangle_{m\zeta}^2. \quad (12)$$

对于单光子压缩迭加态 ($m = 0, n = 1$), 其二阶相关函数为:

$$g_{01\zeta}^{(2)}(0) = [4 \operatorname{sh}^2 s (3 \operatorname{sh}^2 s + 2) |C_1|^2 + \operatorname{sh}^2 s (3 \operatorname{sh}^2 s + 1)] / [\operatorname{ch}(2s) |C_1|^2 + \operatorname{sh}^2 s]^2. \quad (13)$$

对于 $s = 0$, 即为单纯的单光子迭加态, 这时 $g_{01\zeta}^{(2)}(0) = 0$ 。而对 $s \neq 0$ 的单光子压缩迭加态, 这时 $g_{01\zeta}^{(2)}(0)$ 的情况比较复杂。 s 较大时 ($s > 0.4617$), $g_{01\zeta}^{(2)}(0)$ 总是大于 1。当 $0 < s < 0.4617$ 时, 单光子压缩迭加态的统计性质还与 $|C_1|^2$ 有关。以 $s = 0.2$ 时的情况为例, 在 $0 < |C_1|^2 < 0.3322$ 时, $g_{01\zeta}^{(2)}(0) > 1$, 光场是超泊松统计的; 当 $|C_1|^2 \approx 0.3322$ 时, $g_{01\zeta}^{(2)}(0) \approx 1$, 光场是准泊松统计; 当 $0.3322 < |C_1|^2 < 1$ 时, $g_{01\zeta}^{(2)}(0) < 1$, 光场是亚泊松统计, 且有反聚束效应。图 1 中表示了 $g_{01\zeta}^{(2)}(0)$ 与 $|C_1|^2$ 的关系。 $s = 0$ 时, 曲线位于水平轴。

在迭加态中, 光子数分布比较简单, 为:

$$P_{mn}(l) = |C_m|^2 \delta_{l,m} + |C_n|^2 \delta_{l,n} \quad (14)$$

而压缩迭加态中光子数分布 $P_{mnc}(l)$ 可以写成如下形式:

$$P_{mnc}(l) = |C_m|^2 P_{m\zeta}(l) + |C_n|^2 P_{n\zeta}(l) + 2 |C_m C_n| P_{l\zeta}(l) \cos(J\theta - \phi) \quad (15)$$

$P_{m\zeta}(l)$ 及 $P_{n\zeta}(l)$ 分别是压缩光子数态 $S|m\rangle$ 和 $S|n\rangle$ 的光子数分布,

$$P_{\zeta}(l) = \begin{cases} \frac{n!!}{(\text{ch } s)^{2n+1}} \left(\frac{1}{2} \text{th } s\right)^{l-n} & (l-n \text{ 为偶数}) \\ \left| \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (\text{sh } s/2)^{2k}}{k!(n-2k)![(l-n)/2+k]!} \right|^2 & (l-n \text{ 为奇数}) \\ 0 & \end{cases} \quad (16)$$

其中 $[n/2]$ 表示 $n/2$ 的整数部分。(15) 式中 $P_{l\zeta}(l)$ 为迭加时产生的光子数分布的相干项, 当 $l-m, l-n$ 均为偶数时 $P_{l\zeta}(l)$ 为

$$P_{l\zeta}(l) = \frac{l! \sqrt{m!n!}}{(\text{ch } s)^{m+n+1}} (-1)^{l-(m+n)/2} \left(\frac{1}{2} \text{th } s\right)^{l-(m+n)/2} \cdot \sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^{j+k} (\text{sh } s/2)^{2j+2k}}{k!j!(n-2k)!(m-2j)![(l-n)/2+k]![(l-m)/2+j]!} \quad (17)$$

而在 $l-m, l-n$ 中至少有一为奇数时, $P_{l\zeta}(l) = 0$ 。作者曾经研究过迭加态的 Wigner 分布函数^[5]。而对于压缩迭加态, 其 Wigner 函数具有下列形式:

$$W_{m\zeta} = \frac{2}{\pi} \{ (-1)^m |C_m|^2 L_m^{(0)}(4R^2) + (-1)^n |C_n|^2 L_n^{(0)}(4R^2) + |C_m C_n| (-1)^m 2^{j+1} \sqrt{m!/n!} R^j L_m^{(j)}(4R^2) \cos[\phi - (\theta/2 + \gamma)J] \} \exp(-2R^2), \quad (18)$$

$$\text{其中 } R^2 = |\alpha|^2 [\exp(2s) \cos^2(\delta - \theta/2) + \exp(-2s) \sin^2(\delta - \theta/2)], \quad (19)$$

γ 和 α 被定义为

$$\text{tg } \gamma = \exp(-2s) \text{tg}(\delta - \theta/2), \quad \alpha = |\alpha| \exp(i\delta) \quad (20)$$

$L_m^{(j)}(\quad)$ 是拉盖尔多项式。(18) 式中第三项就是迭加时 Wigner 函数的相干项。 $s=0$ 时, (18) 式就是一般迭加态的 Wigner 函数^[5]。

3 压缩迭加态的压缩特性

场振幅算符的两上正交分量 a_1 及 a_2 分别为

$$a_1 = (a^+ + a)/2, \quad a_2 = i(a^+ - a)/2. \quad (21)$$

在压缩迭加态中 a_1 和 a_2 及其平方的平均值分别为:

$$\langle a_1 \rangle_{m\zeta} = \sqrt{n} |C_m C_n| \text{Re}[\lambda_1 \exp(-i\phi)] \delta_{j,1} \quad (22a)$$

$$\langle a_2 \rangle_{m\zeta} = -\sqrt{n} |C_m C_n| \text{Im}[\lambda_2 \exp(-i\phi)] \delta_{j,1} \quad (22b)$$

$$\text{其中 } \lambda_j = \text{ch } s + (-1)^j \exp(i\theta) \text{sh } s \quad (j=1, 2) \quad (23)$$

$$\langle a_j^2 \rangle_{m\zeta} = \frac{1}{4} |\lambda_j|^2 + \frac{1}{2} |\lambda_j|^2 (m|C_m|^2 + n|C_n|^2) - (-1)^j \frac{1}{4} \sqrt{n(n-1)} [\exp(-i\phi) \lambda_j^2 + \exp(i\phi) \lambda_j^{*2}] |C_m C_n| \delta_{j,2} \quad (24)$$

$$|\lambda_j|^2 = \exp(2s) \cos^2(j\pi/2 + \theta/2) + \exp(-2s) \sin^2(j\pi/2 + \theta/2), \quad (j=1, 2) \quad (25)$$

所以在压缩迭加态中, a_1, a_2 的涨落是

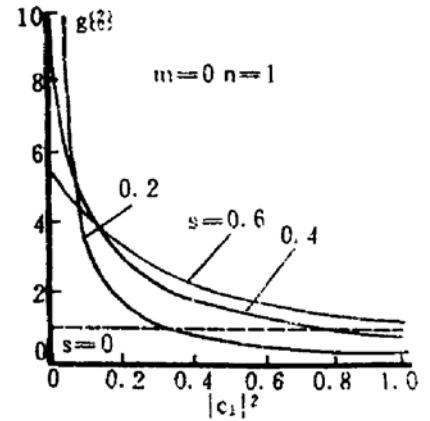


Fig. 1 Second-order correlation functions for the one-photon squeezed superposition states, $g_{l\zeta}^{(2)}(0) \sim |c_1|^2$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta a_j)^2 \rangle_{mn\zeta} = & \frac{1}{4} (1 + 2n - 2J|C_m|^2) |\lambda_j|^2 + (-1)^j \frac{n}{4} [\exp(-i\phi) \lambda_j \\ & - (-1)^j \exp(i\phi) \lambda_j^*]^2 |C_m C_n|^2 \delta_{j,1} - (-1)^j \frac{\sqrt{n(n-1)}}{4} \\ & \times [\exp(-i\phi) \lambda_j^2 + \exp(i\phi) \lambda_j^{*2}] |C_m C_n| \delta_{j,2}. \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (26)$$

为了简单, 只讨论 $\theta = 0$ 和 π 两种情况, 这时 λ_j 和 $|\lambda_j|^2$ 都是实数。 $\zeta = s \exp(i\theta)$ 中 $0 \leq s < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 即(23)、(25)式中 s 是非负的。但针对 $\theta = 0, \pi$ 这两种情况, 可以合并为 $\theta = 0$ 一种情况, 而认为 s 可取一切实数。于是 $s > 0$ 对应于 $\theta = 0$, $s < 0$ 时对应于 $\theta = \pi$, 从而使讨论简化。下面的讨论都作此规定。

3.1 $J = 1$ ($\theta = 0, \pi$) 的情况

$$\begin{aligned} \langle (\Delta a_j)^2 \rangle_{mn\zeta} = & \exp(\pm 2s) \langle (\Delta a_j)^2 \rangle_{mn} \\ = & \exp(\pm 2s) \left[\frac{1}{4} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} |C_m|^2 - n |C_m C_n|^2 \sin^2 \left[\frac{j}{2} \pi + \phi \right] \right] \end{aligned} \quad (27)$$

其中指数上“ $-$ ”对应于 $j = 1$, “ $+$ ”对应于 $j = 2$, $\langle \quad \rangle_{mn}$ 下标 mn 表示在迭加态中计算。在这种情况下 $a_j (j = 1, 2)$ 压缩的必要条件是

$$n - 1/4n < \exp(\pm 2s) \quad (\text{“+”对应 } a_1, \text{ “-”对应 } a_2). \quad (28)$$

但这条件并不是充分的, 具体还要看 $|C_m|^2, \phi$ 的值。称在任何 $|C_m|^2, \phi$ 值时都存在压缩的情况为完全压缩(图中记为 AS); 在任何 $|C_m|^2, \phi$ 值时都不存在压缩的情况为完全不压缩(图中记为 NS); 而称在某些 $|C_m|^2, \phi$ 值时存在压缩, 而在另一些 $|C_m|^2, \phi$ 值时不压缩的情况为部分压缩(图中记为 PS)。用另外两个参数 x, y 代替 $|C_m|^2$ 和 ϕ ,

$$x = \frac{|C_n|}{2 |C_m|} \cos \phi, \quad y = \frac{|C_n|}{2 |C_m|} \sin \phi, \quad (29)$$

并在 $x \sim y$ 平面内引入极坐标 (ρ, ϕ) , $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\phi = \text{tg}^{-1}(y/x)$ 。 $x \sim y$ 平面内每一点对应于一个迭加态。这样, 可以把能产生压缩的 $|C_m|^2, \phi$ 值形象地用 $x \sim y$ 平面中的压缩区域表示出来(因为 $x \sim y$ 平面中每一点有确定的 $|C_m|^2$ 值及 ϕ 值)。在该压缩区域内的迭加态经压缩算符作用后(压缩参数 s 在图中标明)可以获得压缩。在图 2(a) 中表示了 $m = 0, n = 1$ 的单光子压缩迭加态对不同的各种 s 值下的压缩情况。图 2(b) 中表示了相应的 $x \sim y$ 平面内的压缩区域, 其中实线对应于 a_1 压缩区, 虚线对应于 a_2 压缩区。(27) 式表明 a_j 的涨落不仅与迭加相位 ϕ 有关, 也与压缩参量 ζ 有关。在某些迭加相位 ϕ 下, a_j 涨落增加, 而在另一些 ϕ 下, a_j 涨落可减小; 同样在某些压缩方位角 θ

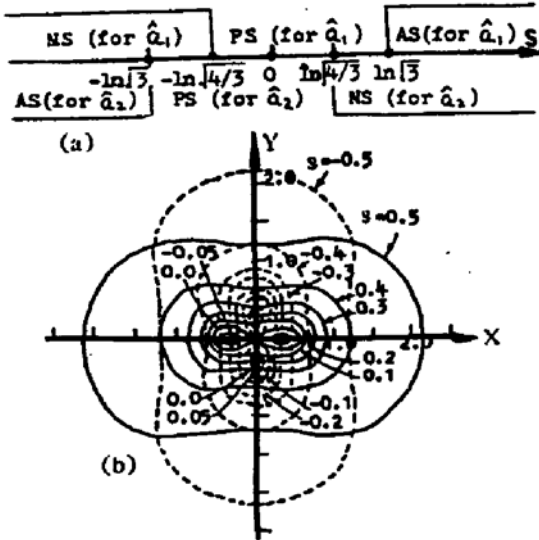


Fig. 2 (a) The squeezing of one-photon squeezed superposition states for all values of s . AS is for the case of all squeezing, which means squeezing occurs for all $|C_m|^2$ and ϕ , PS is for the case of partial squeezing, which means squeezing occurs only for some $|C_m|^2$ and ϕ . NS is for the case of no squeezing, which means squeezing does not occur for any $|C_m|^2$ and ϕ . (b) The squeezing regions for a_1 (solid lines) and a_2 (dotted lines), $s < 0$ is referred to $\theta = \pi$, $s > 0$ is referred to $\theta = 0$

下, 可能使 a_j 涨落减小, 而在另一些 θ 下, 可能使 a_j 涨落增加。这样, 压缩因子 $\exp(\mp 2s)$ 和迭加相干项两者产生的效应可能互相增强, 也可能互相削弱, 总的效应则要综合两者一起考虑。当 $s = 0, m = 0$ 时(27)式就是一般单光子迭加态 a_j 的涨落, 而在压缩迭加态中只不过增加了一个压缩因子 $\exp(\mp 2s)$ 而已。

在 $m = 1, n = 2$ 的情况中, 一般迭加态中 a_j 是不存在压缩的, 但在压缩迭加态中由于压缩因子 $\exp(\mp 2s)$ 的存在, 使 a_j 仍可能存在压缩。在各种 s 值下的压缩情况表示在图 3(a)中, 相应的压缩区域表示在图 3(b)中。

3.2 $J = 2$ ($\theta = 0, \pi$) 的情况

$$\begin{aligned} \langle (\Delta a_j)^2 \rangle_{\min} &= \exp(\mp 2s) \langle (\Delta a_j)^2 \rangle_{\min} \\ &= \exp(\mp 2s) \left[\frac{1}{4} + \frac{n}{2} - |C_m|^2 - (-1)^j \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2} |C_m C_n| \cos \phi \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

式中 $j = 1, 2$ 。指数上的符号规定同(27)。讨论 $m = 0, n = 2$ 的双光子压缩迭加态。同 $J = 1$ 的情况一样, a_j 在双光子压缩迭加态中的涨落与一般双光子迭加态中的涨落相比, 多了一个压缩因子 $\exp(\mp 2s)$ 。图 4(a)中表示了各种 s 值下 a_j 的压缩情况。图 4(b)中表示了 a_1 (实线表示)和 a_2 (虚线表示)的压缩区域, 这些压缩区域是一些圆。也同样可以讨论 $m = 1, n = 3$ 的情况, 这时对一般迭加态来说 a_j 不可压缩, 但由于压缩因子 $\exp(\mp 2s)$ 的存在, 只要适当大小的 s 值, 相应的压缩迭加态中仍可存在压缩, 这儿不再赘述。

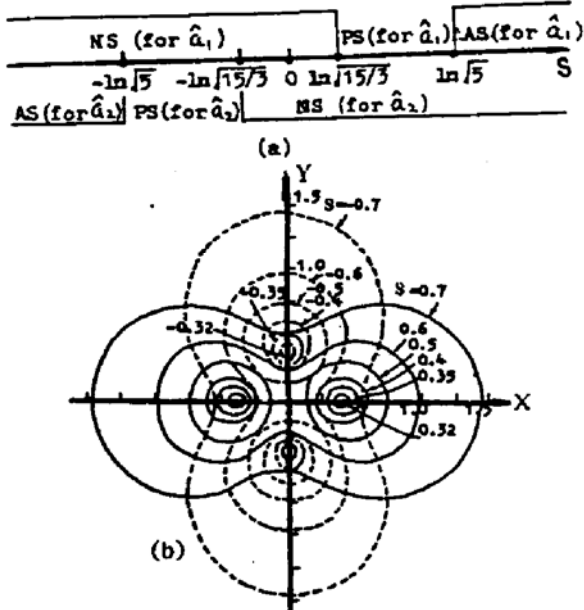


Fig. 3 (a) The squeezing of squeezed superposition states ($m = 1, n = 2$) for all values of s . (b) The squeezing regions for a_1 (solid lines) and a_2 (dotted lines), $s < 0$ is referred to $\theta = \pi$, $s > 0$ is referred to $\theta = 0$

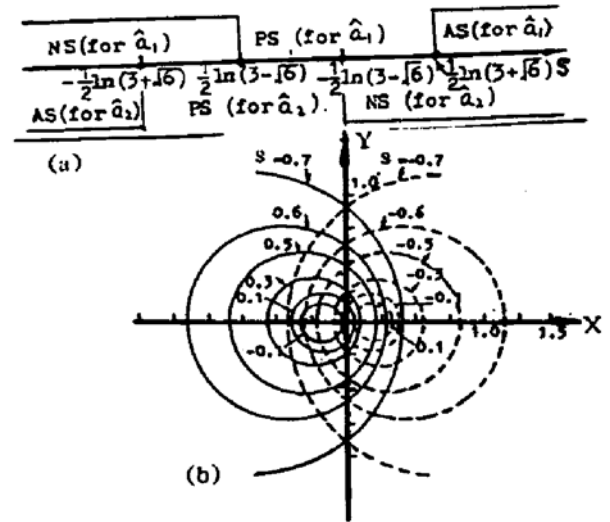


Fig. 4 (a) The squeezing of two-photon squeezed superposition states for all values of s . (b) The squeezing regions for a_1 (solid lines) and a_2 (dotted lines), $s < 0$ is referred to $\theta = \pi$, $s > 0$ is referred to $\theta = 0$

3.3 $J \neq 1, 2$ ($\theta = 0, \pi$) 的情况

在 $J \neq 1, 2, \theta = 0, \pi$ 时压缩条件与相位 ϕ 无关, 压缩条件是:

$$\langle (\Delta a_j)^2 \rangle_{\min} = (1/4) (1 + 2n - 2J |C_m|^2) \exp(\mp 2s) < \frac{1}{4}, \quad (31)$$

在 $s = 0$ 时就是一般的迭加态。对一般迭加态来说, $J \neq 1, 2$ 时 a_1, a_2 不可能被压缩, 但对压

压缩态来说, 由于存在压缩因子 $\exp(-2s)$, 只要 $s > \frac{1}{2} \ln(1 + 2n - 2J|C_m|^2)$, a_1 就可被压缩; $s < -\frac{1}{2} \ln(1 + 2n - 2J|C_m|^2)$ 时 a_2 也可被压缩。

与产生压缩光子数态的方法相类似, 但是用迭加态光场作为压缩系统的输入场是产生压缩态的一条可能途径。这个压缩系统可以是一般产生压缩光的系统, 利用光的各种非线性相互作用, 例如可以通过一个参量放大器, 从而获得压缩态。本文提出了压缩态, 指出了把几种压缩机制结合起来产生辐射场的非经典态的可能性。压缩态结合了 Wigner 相空间的形变和量子相干两种机制, 使得它的许多性质与迭加态和压缩光子数态有联系, 但又不同于迭加态和压缩光子数态, 表现出自己的特点。当压缩参数为 0 时就转化为迭加态, 当迭加几率 $|C_m|$ 或 $|C_s|$ 之一为 0 时就转化为压缩光子数态。

参 考 文 献

- [1] H. P. Yen, Two-photon coherent states of the radiation field. *Phys. Rev. A*, 1976, **12**(6): 2226~2243
- [2] R. Loudon, P. L. Knight, Squeezed light. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(6, 7): 709~759
- [3] K. Wodkiewicz, P. L. Knight, S. T. Buckle *et al.*, Squeezing and superposition states. *Phys. Rev. A*, 1987, **35**(6): 2567~2577
- [4] M. S. Kim, P. A. M. deOliveira, P. L. Knight, Properties of squeezed number states and squeezed thermal states. *Phys. Rev. A*, 1989, **40**(5): 2494~2503
- [5] 董传华, 迭加态的 Wigner 函数. *量子电子学*, 1992, **9**(3): 229~236

Squeezed Superposition States and Their Properties

Dong Chuanhua Miao Lianyuan

(Department of Fundamental Courses, Shanghai University of Technology, Shanghai 200072)

(Received 8 May 1994; revised 15 July 1994)

Abstract The squeezed superposition states introduced in this paper are non-classical states of radiation field generated by using the superposition states as input field of a squeezing system. These states behave two squeezing mechanisms, the one is responsible for the squeezing of Wigner space, the other is responsible for the superposition of number states. The quantum statistical properties and squeezing of the squeezed superposition states are discussed.

Key words squeezing, superposition state.