

# 次条纹积分干涉计量\*

王 鸣 戚小平 邹春华

(南昌大学基础部, 南昌 330029)

**摘 要** 叙述了次条纹积分干涉计量的原理, 仅用一幅光载频干涉条纹图获取全部位相信息。先用分段积分法求出条纹初始位相, 再由最小二乘原理, 迭代出信息的位相解。并讨论了条纹位相的算法, 误差修正和测量面形的应用。

**关键词** 位相测量, 次条纹积分, 干涉仪。

## 1 引 言

现代高精度的光学干涉计量是把条纹细分按位相计量, 从条纹的位相测量中提取信息。其方法是调制干涉条纹, 引入辅助位相, 解出条纹位相, 又称次条纹干涉<sup>[1]</sup>。主要有外差法<sup>[2]</sup>, 条纹扫描法<sup>[3]</sup>、相位法<sup>[4]</sup>和光载频方法<sup>[5]</sup>。上述方法通常要用机械装置和光电器件对光波调制, 并且要多次采集数据, 所以对实验条件和实验装置的要求高, 且含有时间的误差。快速傅里叶变换方法仅用一幅光载频调制干涉图来分析条纹<sup>[6, 7]</sup>, 但其缺点在于滤波时, 滤波窗的选择与具体问题有关, 不便于自动处理; 计算时需要正、负变换和滤波运算, 占用时间长。

Wyant 提出了时间域内的条纹分段积分算法——“四段法”<sup>[8]</sup>。本文提出空间域内的条纹分段积分算法——次条纹积分算法。用物面信息调制光载波, 在调制后的条纹各个周期内分段积分算出位相, 再由最小二乘法拟合物面信息。

## 2 原 理

实验用图 1 所示的双光束干涉仪检测光学元件表面面形。在实验装置中, CCD 摄像机用于拍摄图像, 次条纹积分算法用于分析条纹图像。将参考平面倾斜一小角度引入载频条纹, 经调制的条纹图像光强表达式为

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\varphi(x, y) + \varphi_r] \quad (1)$$

式中  $a(x, y)$  为背景光强,  $b(x, y)$  为振幅,  $\varphi(x, y)$  为所求位相信息, 也是(1)式的初相,  $\varphi_r$  是光载频引入的辅助位相, 当载频条纹沿  $y$  方向时有最简单形式

$$\varphi_r(x, y) = 2\pi fx \quad (2)$$

\* 国家教委留学回国科研基金资助项目。

收稿日期: 1995年2月1日; 收到修改稿日期: 1995年9月19日

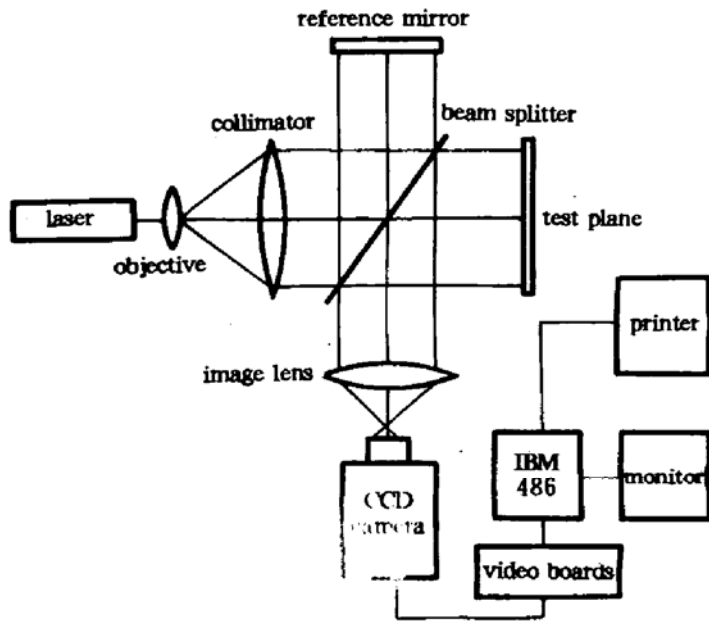


Fig. 1 Optical setup to reveal the subfringe integration interferometry

式中  $f$  为光载频条纹在  $x$  方向的空间频率

$$f = 1/T \tag{3}$$

$T$  为光载频在  $x$  方向的空间周期。对于次条纹干涉, 通常选取光载频条纹密, 即空间频率  $f$  高。由条纹光强的频谱分析可知,  $a(x, y)$ 、 $b(x, y)$  和  $\varphi(x, y)$  的空间变化率比空间频率  $f$  慢得多。在采样周期  $T_j$  内, 背景光强, 振幅和位相可看成不变,

$$a(x, y) = a_j, \quad b(x, y) = b_j, \quad \varphi(x, y) = \varphi_j, \tag{4}$$

对应一周期  $T_j$  内的干涉条纹强度分布

$$I_j(x) = a_j + b_j \cos [2\pi f x + \varphi_j] \tag{5}$$

以纯载频条纹信号作基准, 测量被面形调制后的条纹位相信号, 就可算出面形的位相分布。纯载频区域的条纹信号为正弦波如图 2

(a) 所示。经面形调制后的条纹信号强度分布函数与载频信号相同, 但各点位相变化了,  $\varphi_j$  就是测量点的初位相, 如图 2(b) 所示。

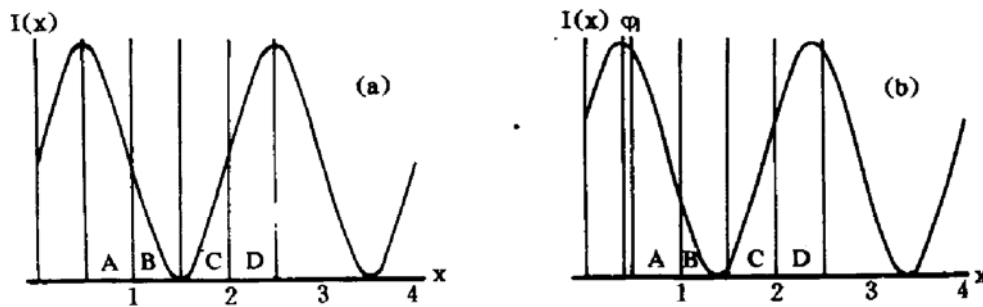


Fig. 2 Principle of subfringe integration method

(a) Carrier fringe signal, (b) Modulated fringe signal

根据载频信号可把空间采样周期  $T_j$  (设采样周期等于载频周期,  $T_j = T$ ) 分成  $k$  等分, ( $k \geq 3$ ), CCD 器件在等分空间 ( $T/k$ ) 的光强积分为

$$Q_{ij} = \int_{S_{i,j}} I(x) dx, \quad i = 0, \dots, k - 1 (k \geq 3) \tag{6}$$

积分区域  $S_{i,j}$  由下式确定

$$S_{i,j} = \{ T[j + (2i - 1)/2k], T[j + (2i + 1)/2k] \} \tag{7}$$

如取  $k = 4$ , 则积分区域有  $A, B, C, D$  4 个区间, 如图 2(b) 所示, 分别为

$$\begin{aligned} A = S_{0j} &= [-T/8, T/8], & B = S_{1j} &= [T/8, 3T/8], \\ C = S_{2j} &= [3T/8, 5T/8], & D = S_{3j} &= [5T/8, 7T/8]. \end{aligned}$$

在采样空间周期  $T_j$  内产生的光强积分值为

$$Q = \int_{-T/8}^{T/8} I(x) dx + \int_{T/8}^{3T/8} I(x) dx + \int_{3T/8}^{5T/8} I(x) dx + \int_{5T/8}^{7T/8} I(x) dx = A + B + C + D \tag{8}$$

通过积分运算求得各个区间强度积分

$$\begin{aligned} A &= T\left(\frac{a_j}{4} + \frac{\sqrt{2} b_j}{2\pi} \cos \varphi_j\right), & B &= T\left(\frac{a_j}{4} - \frac{\sqrt{2} b_j}{2\pi} \sin \varphi_j\right), \\ C &= T\left(\frac{a_j}{4} - \frac{\sqrt{2} b_j}{2\pi} \cos \varphi_j\right), & D &= T\left(\frac{a_j}{4} + \frac{\sqrt{2} b_j}{2\pi} \sin \varphi_j\right), \end{aligned} \quad (9)$$

由(9)式求得  $X_j$  点位相  $\varphi_j$  为

$$\varphi_j = \arctan \frac{D - B}{A - C} = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{A - C}{B - D} \quad (10)$$

以上结果是在条纹强度分布为正弦波的条件下推导出来的, 如果条纹信号含有谐波, 将给位相测量引入非线性误差。这时增加积分次数可减小误差。如取  $k = 8$  时, 通过类似的推导得

$$\varphi_j = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{A + 0.414B - 0.414C - D - E - 0.414F + 0.414G + H}{0.414A + B + C + 0.414D - 0.414E - F - G - 0.414H} \quad (11)$$

### 3 误差分析和修正

在推导次条纹积分算法的计算公式时, 曾假定在一个采样周期  $T_j$  内,  $a_j$ 、 $b_j$  和  $\varphi_j$  均保持不变。但在实际情况下, 对离散的条纹数据进行采集和分段积分时, 噪声、非均匀照明、条纹的突变都会给位相测量带来误差。其中主要的误差有两项: 采样周期  $T_j$  内条纹位相变化引入的位相误差  $\Delta\phi_j$ ; 采样周期  $T_j$  与载频周期  $T$  不一致产生的估计误差  $\Delta\phi_e$ 。下面分别予以讨论。

#### 3.1 采样周期内位相变化引入的误差 $\Delta\phi_j$

在次条纹干涉测量中, 信号和位相变化比光载频变化慢得多, 所以在采样周期内, 位相变化近似是线性的

$$\varphi_{rj} = \varphi_j + \varphi_{1j}x \quad (12)$$

$\varphi_{1j}$  为单位长度的位相变化。将(12)式代入(8)式和(10)式可求出位相变化项  $\varphi_{1j}$  产生的误差

$$\Delta\phi_j = \varphi_{rj} - \varphi_j = \arctan \frac{\sin(\varphi_j + \mu_j/2)}{\cos(\varphi_j + \mu_j/4)} - \varphi_j \quad (13)$$

式中  $\mu_j = \varphi_{1j}T_j$ , 它表示在采样周期  $T_j$  内的位相变化量。由(13)式可估计该项误差。如果采样周期  $T_j$  内的位相变化量  $\mu_j = \pi/10$ , 计算的位相误差  $\Delta\phi_j = \pi/25$ ; 如果减小  $\mu_j = \pi/20$ , 相应的  $\Delta\phi_j = \pi/50$ 。

#### 3.2 采样周期 $T_j$ 与光载频周期 $T$ 不一致的位相估计误差 $\Delta\phi_e$

通常采样周期  $T_j$  是按条纹平均间隔选取, 它不恒等于载频周期  $T$ , 设两者不一致因子为

$$\varepsilon = |T_j/T - 1| \quad (14)$$

代入光强表达式(5)得到

$$I_j(x) = a_j + b_j \cos [(2\pi/T)(1 + \varepsilon)x + \varphi_j] \quad (15)$$

运用上节类似方法可求得一致因子  $\varepsilon$  产生的位相估计误差  $\Delta\phi_e$ 。

$$\Delta\phi_e = \varphi_{ej} - \varphi_j = \arctan \frac{\sin(\varphi_j + 2\pi\varepsilon j + \pi\varepsilon)}{\cos(\varphi_j + 2\pi\varepsilon j + \pi\varepsilon/2)} - 2\pi\varepsilon j - \varphi_j \quad (16)$$

式中  $j = INT(x/T_j)$ , 由(16)式估计该项误差。当  $\varepsilon = 0.2$ , 即采样周期偏离 20% 时, 产生最大位相估计误差为  $\pi/16$ 。

#### 3.3 最小二乘法修正误差

从 3.1, 3.2 两节的分析可知, 误差主要来源于采样周期  $T_j$  的取值。为减小误差, 可以用

最小二乘法修正。根据最小二乘法原理,取余弦函数为拟合函数,则定义惩罚函数

$$E = \sum_{j=1}^N \{I_j - [a_j(x) + b_j(x) \cos \theta_j]\}^2 \quad (17)$$

式中  $N$  是该行像素数,

$$\theta_j = 2\pi x_j/T + \phi_j \quad (18)$$

选择估计式中的修正项  $a_j, b_j, T_j, \phi_j$ , 使得误差平方和  $E$  最小, 得到下列非线性方程组

$$\sum_{j=1}^N I_j = \sum_{j=1}^N a_j + b_j \cos \theta_j \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^N I_j \cos \theta_j = \sum_{j=1}^N (a_j + b_j \cos \theta_j) \cos \theta_j = \sum_{j=1}^N (a_j \cos \theta_j + b_j \cos^2 \theta_j) \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^N I_j \sin \theta_j = \sum_{j=1}^N (a_j \sin \theta_j + \frac{b_j}{2} \sin 2\theta_j) \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^N I_j \sin \theta_j x_j b_j = \sum_{j=1}^N (a_j \sin \theta_j + \frac{b_j}{2} \sin 2\theta_j) x_j b_j \quad (22)$$

非线性方程组项用迭代法求解<sup>[9]</sup>。Newton-Raphson 方法有二次收敛之优点, 它的主要缺点是必须找到好的初始近似。这个问题在次条纹积分算法中不难解决, 因为在四段积分前, 条纹识别子程序已近似确定了条纹峰谷值的幅度及相应位置, 从而提供了好的初始值: 背景光强  $a_j$ , 振幅  $b_j$ , 周期  $T_j$  以及初相  $\phi_j$ 。有了好的初始值, 再加上优化的算法, 迭代解可以很快地收敛到正确解, 得到修正的位相值  $\varphi_j$ 。

经最小二乘法修正的位相均方根误差用计算机模拟的结果如图 3 所示。设位相变化项  $\mu_j = 0$ , 水平轴表示采样周期与载频周期的偏离因子  $\epsilon$ , 垂直轴表示计算的位相均方根误差。由图可见, 未修正的误差值在  $10^{-2}$  数量级, 而修正后的误差值在  $10^{-4}$  数量级。综合所有误差项, 可确定次条纹积分算法的理论精度优于  $\lambda/50$ 。

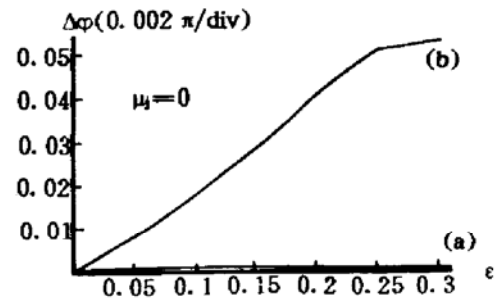


Fig. 3 Phase error estimation;

(a) Phase error estimation without least-squares correction, (b) Phase error estimation with least-squares correction

## 4 实验结果

次条纹积分位相检测的实验装置如图 1 所示。其中干涉图由泰曼-格林干涉仪产生, CCD 摄像机摄取条纹图像信号, 由 IBM-486 微机和图像卡组成的图像系统处理图像信号, 图像卡的帧存体容量为  $4 \times 512 \times 512 \times 8$  bit。用次条纹积分算法, 算出条纹位相。图像数据的读写和运算通常在内存和帧存体间进行, 所以处理速度快。

次条纹积分算法求解条纹位相的步骤: 将载频调制的干涉条纹图, 逐行输入条纹信号, 逐行采样运算, 求出背景光强  $a(x)$ , 振幅  $b(x)$  和空间周期  $T$  后, 再用分段积分算法, 即(8)式和(10)式算出位相。经位相去包裹、迭代运算以及波面拟合, 最后得到面形的位相分布。

作为测量实例, 用次条纹积分干涉法测量了一平面镜的面形。图 4(a)是光载频调制的干涉条纹图, 图 4(b)是沿中心截面的条纹强度分布  $I(x)$ 。采样点阵为  $512 \times 512$ , 计算的载频周期  $T$  约 12 pixel, 故采样周期取 12 pixel。根据(10)式, 算得图 4 的位相主值如图 5(a)所示, 其在中心截面的位相分布如图 5(b)所示。经过位相去包后获得位相分布如图 6 所示。最后经波面拟合得到被测面形位相分布, 通常以波差形式表示。对于泰曼-格林干涉仪, 波差  $w(x)$ ,

$y)$  与位相  $\phi(x, y)$  有如下关系

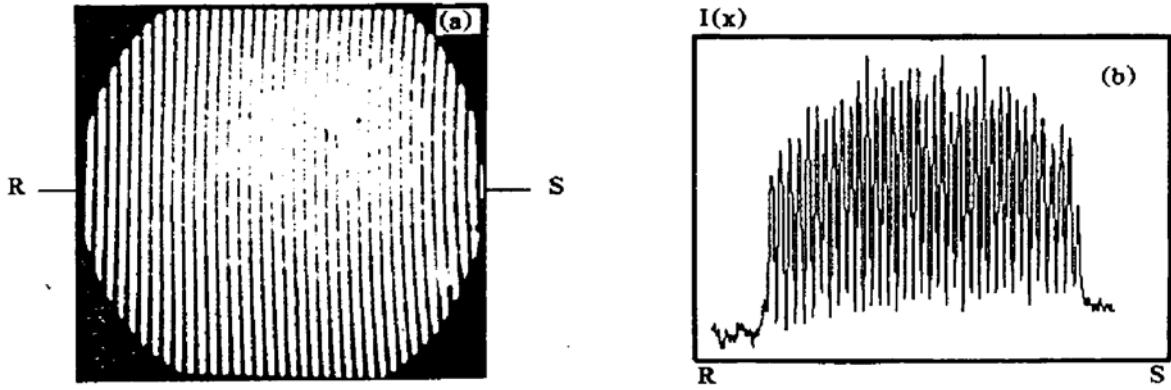


Fig. 4 (a) Interference fringes pattern observed on the TV monitor, (b) Fringe intensity profile  $I(x)$  of a central cross section

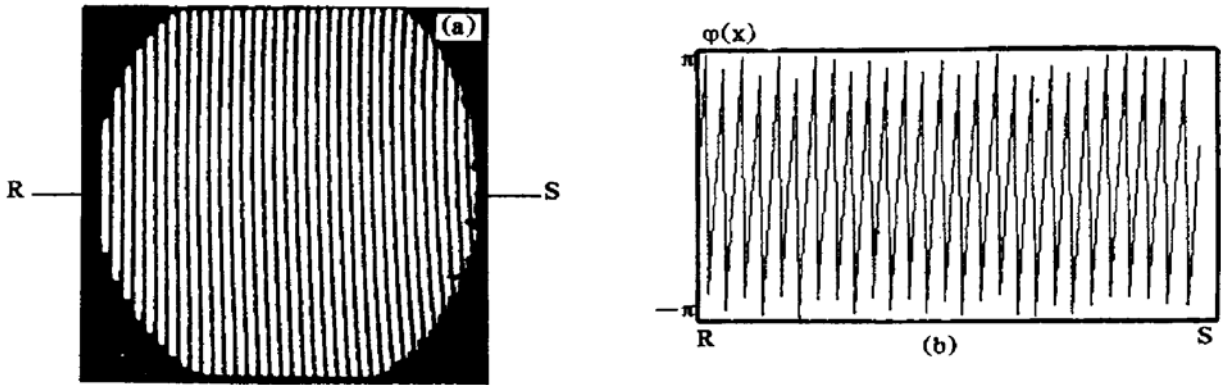


Fig. 5 (a) Principal value of the wrapped phases, (b) Its profile of a central cross section

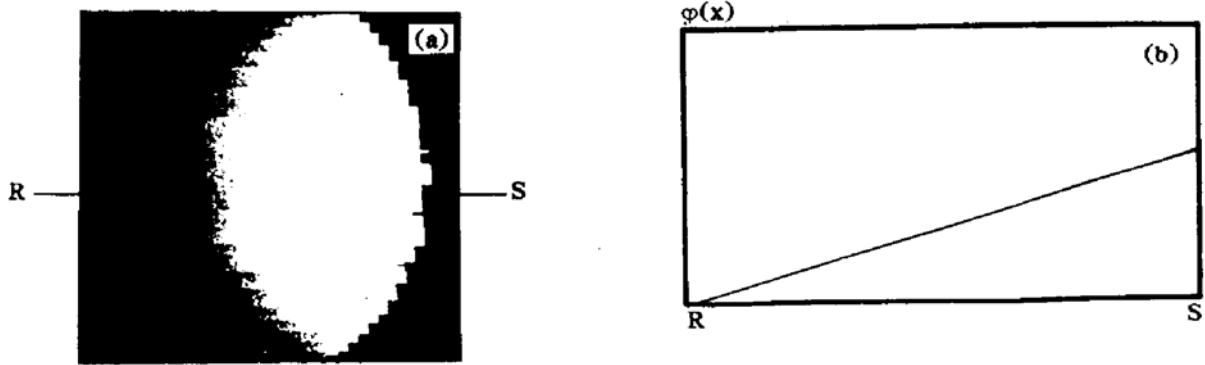


Fig. 6 (a) Unwrapped phases, (b) Its profile of a central cross section

$$\phi(x, y) = 2 (2\pi/\lambda) w(x, y) \tag{28}$$

图 7 为被测平面镜的波差  $w(x, y)$  的三维立体图和二维等值线图。波差的  $PV$  值是 0.098,  $RMS$  值为 0.020, 等值线间隔是  $\lambda/30$ 。

**结 论** 本文将次条纹积分算法用于干涉测量分析, 条纹的位相信息由分段积分法算出, 位相误差由最小二乘法修正。与其它高精度的位相检测方法相比(如相移法和外差法), 次条纹积分法的实验装置简单, 操作容易, 并且只需从一幅条纹图像中提取全部信息。由计算可知, 次条纹积分法可获得精度为  $\lambda/30 \sim \lambda/50$  的测量结果。这个精度略低于相移法和外差法的精度, 这是因为次条纹积分法采用空间调制, 某一点位相须从邻近象素的光强算出。从次条纹积分法的原理和实验还可见, 这种光电系统易于实现硬件化, 从而发展成自动、精密、实时的位相检测技术。

**致谢** 本文曾得到日本筑波大学谷田贝丰彦教授的指导, 在此表示衷心感谢。

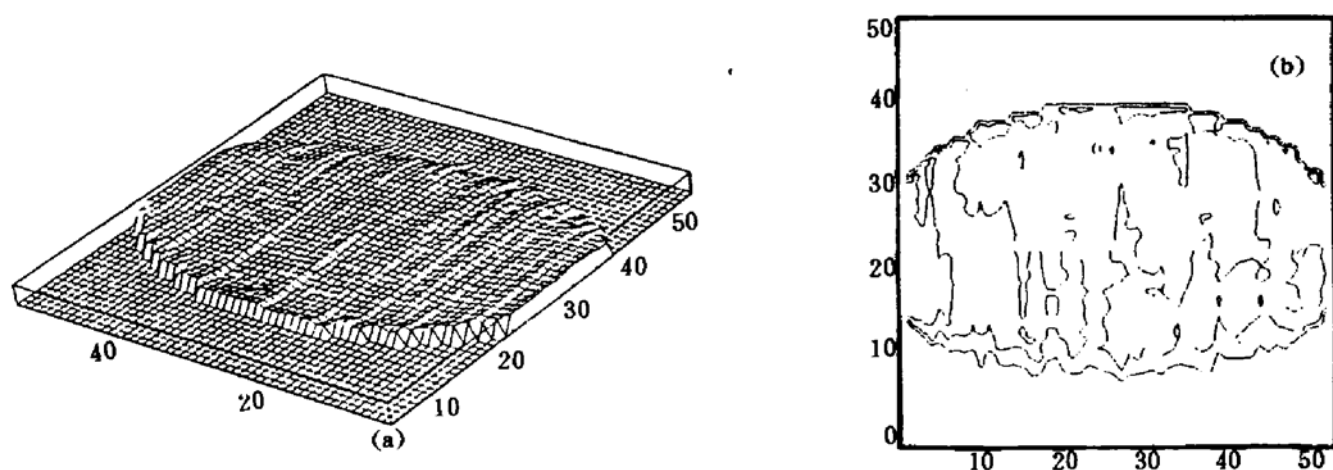


Fig. 7 (a) Three-dimension wavefront, (b) Two-dimension contour

### 参 考 文 献

- [1] 武田光夫, サブフリンジ干渉計測基础论. 光学[日], 1985, 13(1): 55~65
- [2] R. Dändliker, R. Thalmann, Heterodyne and quasi-heterodyne holographic interferometry. *Opt. Engng.*, 1985, 24(5): 824~831
- [3] J. H. Bruning, D. R. Herriott, J. E. Gallagher *et al.*, Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses. *Appl. Opt.*, 1974, 13(11): 2693~1703
- [4] M. Chang, Hu Ch.-P, P. Lam *et al.*, High precision deformation measurement by digital phase shifting interferometry. *Appl. Opt.*, 1985, 24(22): 3780~3783
- [5] T. Yatagai, Automated fringe analysis techniques in Japan. *Opt. & Laser Eng.*, 1991, 15(1): 79~91
- [6] M. Takeda, H. Ina, S. Kpbayashi, Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *J. Opt. Soc. Amer. (A)*, 1982, 72(1): 156~160
- [7] Th. Kreis, Digital holographic interference-phase measurement using the Fourier-transfer method. *J. Opt. Soc. Amer. (A)*, 1986, 3(6): 847~855
- [8] J. C. Wyant, Use of an ac heterodyne lateral shear interferometer with real-time wavefront correction system. *Appl. Opt.*, 1975, 14: 2622
- [9] C. J. Morgan, Least-squares estimation in phase-measurement interferometry. *Opt. Lett.*, 1982, 7(8): 368~370

## Subfringe Integration Interferometry

Wang Ming    Qi Xiaoping    Zou Chunhua

(Basic Department, Nanchang University, Nanchang 330029)

(Received 1 February 1995; revised 19 September 1995)

**Abstract** We describe a subfringe integration interferometry for which the phase information is evaluated only from one interferogram. The initial phases are obtained by subfringe integration method, then the precision iteration to estimate the phase can be developed from the principle of least-squares estimation. In addition, the phase-extraction algorithm, error correction and some applications to the measurement of the surface shape are discussed.

**Key words** phase measurement, subfringe integration, interferometer.