第15卷 第11期
1995年11月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 15, No. 11
November, 1995

光学双稳态的输出特性研究

曾贵华 徐至展

(中国科学院上海光学精密机械研究所，上海 201800)

摘 要 研究了光学双稳系统在处理带噪声周期信号时的一种新的功能，并对输入任意周期小信号时的输出特性进行了研究。

关键词 光学双稳态， 输出特性， 概率密度函数.

1 引 言

光学双稳在光计算和信息处理中有着重要的地位，利用光学双稳特性，可实现光学开关、“门”线路、光学放大和限幅等，这些都已有了丰富的研究和应用。最近，光学双稳态的一种新的处理信息的功能被发现：Roy 等利用声光调制的环形激光器实现光学双稳态并发现可通过该系统从噪声背景中提取并放大微弱简谐信号[1]。在此过程中由于非线性的作用，部分噪声能量转化为信号能量[2]，因此，这一现象蕴含着很好的应用前景。

实际问题中往往涉及其它各种信号，本文利用作者提出的响应方法，对输入任意周期小信号情形($A \ll U$，这里 A 和 U 分别为信号的幅值及等效势的势垒高度)进行了较全面的研究，发现了一些新的输出特性并获得信噪比的一般性结论。

2 模型建立

在各种光学双稳系统中，其双稳态对应的等效势中含有两个势阱和一个势垒，双稳态中光场的动力学演化类似于一过阻尼“经典粒子”在双阱中的运动[3]，因此可用在双稳系统中运动的“经典粒子”来模拟其动力学演化过程。设序参量 x，则受到输入任意周期信号 $f(t)$ 调制、高斯白噪声 $\zeta(t)$ 驱动的双稳系统的动力学演化方程为：

$$\frac{\partial x}{\partial t} = ax - bx^3 + f(t) + \zeta(t) \tag{1}$$

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \qquad \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = D\delta(t - t') \tag{2}$$

式中 a, b 为与系统有关的参数，D 为噪声强度。当 $f(t) = A\cos(\Omega t + \theta)$ 时即为已被广泛研究过的情形[1~5]。

3 概率密度

收稿日期:1994年10月31日；收到修改稿日期:1994年12月5日

将(1)式、(2)式转化为Fokker-Planck(F-P)方程

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=(L+L')P(x,t) \tag{3}$$

$$L=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V(x)}{\partial \chi}\right)+D\frac{\partial^2}{\partial x^2},\qquad L'=-\frac{\partial}{\partial x}f(x) \tag{4}$$

式中 L 为 F-P 算子，L' 为输入信号引起的附加小算子，$V(x)$ 为系统的等效势。对双稳系统 $V(x)=-\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{4}bx^4$，势垒高度 $U=V(0)-V(c)$，$V(0)$，$V(c)$ 分别为等效势的势垒点和势阱点的值。令 $P(x,t)=e^{Lt}Q(x,t)$ 并代入 F-P 方程，考虑到初始条件 $P(x_0,t_0)=\delta(x-x_0)$ 得到系统的概率密度函数

$$P(x,t)=\sum_{n=0}\langle n|_{x_0}e^{-\lambda_n(t-t_0)}|\rangle+\int_{t_0}^{t}e^{L(t-s)}L'P(x,t)ds \tag{5}$$

式中 $|n\rangle$ 和 λ_n 分别为 F-P 算子的本征矢和对应的本征值，$n=0,1,2,\cdots$。(5)式是 F-P 方程的形式解，对任意周期信号和高斯白噪声驱动的系统均成立。利用其迭代特性可获得任意阶精确解，但在具体求解时需做某些近似。若输入周期小信号，利用 L 的如下特性[4,5]。

1) $\lambda_0=0$, $\lambda_1\ll\lambda_i$, $i=1,2,3,\cdots$

2) $\langle 0|=1$, $|0\rangle=N\exp[V(x)/D]$, N 为归一化常数，

3) $\langle n|=N^{-1/2}\exp[V(x)/2D]\,\psi_n(x)$, $\langle n|=N^{1/2}\exp[-V(x)/2D]\,\psi_n(x)$, $\psi_n(x)$ 为 F-P 算子的本征矢[4]

4) $\langle m|n\rangle=\delta_{m,n}$, $m,n=0,1,2,3,\cdots$

由(5)式得到一阶近似解

$$P(x,t)=|0\rangle+\beta(t)|1\rangle+\exp[-\lambda_1(t-t_0)][\langle 1|_{x_0}+\alpha(t)]|1\rangle$$

式中脚标 x_0 表示该态矢对应的初值，$\alpha(t)$，$\beta(t)$ 依赖于信号的具体表示。

将输入信号作傅里叶级数展开，计算得到：

$$\alpha(t)=\sum_{m=0}\left[\frac{a_mR_{10}}{(\lambda_1^2+m^2\Omega^2)^{1/2}}\cos(m\Omega t_0+m\theta-\gamma m)+\frac{b_mR_{10}}{(\lambda_1^2+m^2\Omega^2)^{1/2}}\sin(m\Omega t_0+m\theta-\gamma_m)\right) \tag{7}$$

$$\beta(t)=\sum_{m=0}\left[\frac{a_mR_{10}}{(\lambda_1^2+m^2\Omega^2)^{1/2}}\cos(m\Omega t+m\theta-\gamma m)+\frac{b_mR_{10}}{(\lambda_1^2+m^2\Omega^2)^{1/2}}\sin(m\Omega t+m\theta-\gamma_m)\right) \tag{8}$$

式中 $\gamma_m=\arctan(\frac{m\Omega}{\lambda_1})$，$\Omega$，$\theta$ 是输入信号频率和初相位，a_m，b_m 为输入信号的傅里叶系数[4]，$R_{10}=\langle 1|\partial/\partial x|0\rangle\simeq-\lambda_1(1+\sqrt{\frac{2\pi D}{a}}/D$，$\lambda_1=a^{1/2}\exp[-(U/D)/\pi]$

4 输出特性

4.1 输出信号

由(6)式求得长时间极限下输出信号的平均值：

$$\langle x(t)\rangle=\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}xP(x,t)dx=\langle 0|x|1\rangle\beta(t) \tag{9}$$

式中 $\langle 0|x|1\rangle \simeq (a/b)^{1/2}$。从(8)、(9)式有：

1) 输出信号的各谐波分量的幅值均发生变化，比较(9)式和输入信号的傅里叶展开式知增大倍数

$$\eta = \frac{R_{10}}{(\lambda_1^2 + m^2\Omega)^{1/2}}\langle 0|x|1\rangle \tag{10}$$

在噪声强度 D 增大的过程中出现一个峰值，这说明在一定噪声强度时，输出信号的强度可以获得一个很大值，这是线性系统中无法产生的。另外可以看出，每个谐波分量的增大倍数是不同的，其中基波的最大，然后依次递减。若信号中存在直流分量，则该直流分量的增大倍数最大，但在随 D 的变化过程中无峰值出现，且按双曲函数递减。

2) 输出与输入信号相比，其相位有变化，即各谐波分量存在相移：

$$\varphi_m = \pi + \arctan\ (m\Omega/\lambda_1) \tag{11}$$

3) 输出信号按输入信号的周期振荡。

4.2 输出相关函数

由(6)式得到双稳系统的输出信号的相关函数：

$$\langle x(t+r)x(t)\rangle = \langle\beta(t+\tau)\beta(t)\rangle(\langle 0|x|1\rangle)^2 + e^{-\lambda_1\tau}(\langle 0|x|1\rangle)^2(1+\langle a(t+\tau)\beta(t)\rangle) \tag{12}$$

代入 $a(t)$，$\beta(t)$ 的具体表示并计算得到相关函数的极值条件($D \ll U$)

$$\sum_{m=0}\frac{g_m^2\,(\lambda_1^4 + 3m^2\Omega^2\lambda_1^2)}{g^2\,(\lambda_1^2 + m^2\Omega^2)^2} = 1 \tag{13}$$

式中 $g_m^2 = a_m^2 + b_m^2$，$g^2 = \sum_{m=0} g_m^2$。由(15)式知，若只有直流分量，则在 $D \ll U$ 下的任何条件都成立，若输入信号为简谐信号，与文献[1～5]的结论一致。

4.3 输出功率谱

对(12)式做傅里叶变换得到功率谱密度 $S(\omega)$：

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) \tag{14}$$

$$S_1(\omega) = \frac{\pi R_{10}^2}{2}(\langle 0|x|1\rangle)^2\sum_{m=0}\frac{a_m^2 + b_m^2}{\lambda_1^2 + m^2\Omega^2}\left[\delta(\omega - m\Omega) + \delta(\omega + m\Omega)\right]$$

$$S_2(\omega) = \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \omega^2}\left(1 - \frac{R_{10}^2}{2}\sum_{m=0}\frac{a_m^2 + b_m^2}{\lambda_1^2 + m^2\Omega^2}\right)(\langle 0|x|1\rangle)^2$$

(14)式表明有部分噪声能量转化为信号能量，因此，这一现象中潜在很大的应用前景。

4.4 关于信噪比

由(14)式按文献[2,4]的定义求得信噪比，当 $\omega = k\Omega$ 时

$$R \simeq \frac{\pi c^2(a_k^2 + b_k^2)\lambda_1^2}{4}\,\frac{\lambda_1^2}{D^2}\,(\langle 0|x|1\rangle)^2 \tag{15}$$

易知随 D 的增强，信噪比 R 亦增加，直到 $D = U/2$ 时出现极大值，这与线性系统中的情况完全不同，在线性系统中将尽可能压抑噪声，而这里却利用了它，因此可获得比最佳线性滤波器更高的信噪比[5]，输入直流信号时亦有信噪比的极值存在。

结　语　在光学双稳系统中同时输入周期小信号和噪声，系统的非线性将压抑噪声而提高输出信号，这种现象被称为随机共振。由以上的分析发现，系统的输出量不但与输入信号有关，而且与输入噪声和双稳系统均有关，这显示了双稳系统在处理信号中的一种新的功能，潜在着实用前景。

参 考 文 献

[1] B. McNamara, K. Wiesenfied, R. Roy, Observation of stochastic resonance in a ring laser. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, **60**(22) : 2626～2629
[2] B. McNamara, K. Wiesenfied, Theory of stochastic resonance. *Phys. Rev. A*, 1989, **39**(5) : 4854～4869
[3] L. Vemuri, R. Roy, Stochastic resonance in a bistable ring laser. *Phys. Rev. A*, 1989, **39**(5) : 4668～4674
[4] G. Hu, G. Nicolis, L. Nicolis, Periodically forced Fokker-Planck equation and stochastic resonance. *Phys. Rev. A*, 1990, **42**(8) : 2030～2041
[5] 龚德纯，秦光戎，胡岗等，由随机共振可获得比最佳线性滤波器更高的信噪比。中国科学 A，1992，**8**(3) : 828～833

Output Characteristics of Optical Bistibality

Zeng Guihua Xu Zhizhan
(*Shanghai Institute of Optics & Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai* 201800)
(Received 31 October 1994; revised 5 December 1994)

Abstract A new function of optical bistability in information processing is presented in this paper. By using a analogue evolution of a "classic particle" in double potential well to field, some new output characteristic of system were found and extensively discussed for the input harmornic signal.

Key words optics bistability, output characteristic, probability density.