

统一展开理论在激光系统中的应用*

何 健 曹 力 吴大进

(华中理工大学物理系和激光技术国家实验室, 武汉 430074)

摘 要 在统一展开理论(UET)的框架内, 通过提高推导过程中的精度, 得到了更精确的结果, 且将其推广应用到激光系统中。具体研究了两个激光模型, 得到了它们的光强定态几率分布、光强平均值及其相对涨落, 通过比较发现, 本文所得到的结果明显的改善了用统一色噪声近似所得到的结果而与精确的数值结果和数值模拟结果符合得更好。

关键词 染料激光, 统一展开理论, 光强平均值, 光强相对涨落。

1 引 言

近十多年来, 单模激光统计性质的研究引起了广泛的兴趣^[1~7, 9~13], 白噪声驱动激光系统的理论与实验研究越来越深入^[1~4], 色噪声驱动系统的理论方法也有了新的进展, 先后提出了最佳福克-普朗克方程近似(BFPEA)^[5]、统一色噪声近似(UCNA)^[6, 7]以及统一展开理论(UET)^[8]等新的处理方法, 前两种方法已先后被推广应用到激光系统。

本文将统一展开理论推广应用到激光系统中, 具体研究了以下四个方面的问题。第一, 激光系统中的泵噪声系统乘法色噪声, 为了便于处理激光系统, 将处理加法色噪声驱动系统的统一展开理论推广到乘法色噪声驱动系统情形; 第二, 在统一展开理论的框架内, 通过提高推导过程中的精度, 得到了统一展开理论关于定态几率分布的更精确的表达式; 第三, 应用更精确的统一展开理论研究了单模染料光色损耗模型和色增益模型, 得到了它们的光强定态几率分布, 通过比较发现, 用更精确的统一展开理论所得到的结果明显的改善了文献[7]和文献[9]中用统一色噪声近似所得到的结果而与精确的数值结果^[10]和数值模拟结果^[11]符合得更好; 第四, 在得到光强定态几率分布的基础上, 进一步研究光强的各阶矩, 得到了光强的平均值及其相对涨落的解析表达式。

2 乘法色噪声驱动系统的统一展开理论及其关于定态几率分布的更精确的表达式

2.1 乘法色噪声驱动系统的朗之万方程变为等价的加法色噪声驱动系统的朗之万方程

设乘法色噪声驱动系统的朗之万方程为:

* 国家自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1994年6月27日

$$\dot{x} = f(x) + g(x)Q(t), \tag{1}$$

两边同除 $g(x)$ ，并令 $x/g(x) = y$ ，则乘法色噪驱动系统可以变为加法色噪声驱动系统：

$$\dot{y} = F(y) + Q(t). \tag{2}$$

其中

$$y = \int \frac{1}{g(x)} dx.$$

以上的讨论中， $Q(t)$ 为 Ornstein-Uhlenbeck 噪声，其统计性质满足：

$$\langle Q(t) \rangle = 0, \quad \langle Q(t)Q(s) \rangle = D \gamma \exp(-\gamma|t-s|) \tag{3}$$

其中 D 为噪声强度， $\tau = 1/\gamma$ 为噪声的关联时间。

2.2 统一展开理论关于定态几率分布的更精确的表达式

根据统一展开理论^[8]，由加法色噪声驱动系统的定态几率分布可以表示为：

$$\begin{aligned}
 P_{st}(x) &= \int P_{st}(x, y) dy = \int N \exp[-\psi(x, y)] dy \\
 &= \int N \exp[-\psi_0(x, y)/\varepsilon - \psi_1(x, y)] dy. \tag{4}
 \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon = Dr^2$ ， $\psi_0(x, y)$ 、 $\psi_1(x, y)$ 为 $\psi(x, y)$ 关于 ε 的前两级展开项，且可以进一步展开为：

$$\psi_0(x, y) = V_0(x) + V_1(x)T + V_2(x)T^2 + \dots \tag{5}$$

$$\psi_1(x, y) = u_0(x) + u_1(x)T + u_2(x)T^2 + \dots \tag{6}$$

在(5)、(6)两式中， $T = f(x) + y$ ，而 $f(x)$ 与具体的系统有关， $V_0(x)$ 、 $V_1(x)$ 、 $V_2(x)$ 、 \dots ， $u_0(x)$ 、 $u_1(x)$ 、 $u_2(x)$ 、 \dots 的表达式可由文献[8]中的(2.13)和(2.18)两式求得。

文献[8]在计算 $u_0(x)$ 时，认为可以不考虑 $V_2^{(1)}(x)$ 、 $V_3^{(1)}(x)$ ，然而本文作者发现在计算 $u_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 时，对 $V_n(x)$ 若都多考虑一级，即 $V_n(x) = V_n^{(0)}(x) + V_n^{(1)}(x)$ ，则在处理激光系统时所得到的结果要与精确的数值结果或数值模拟结果符合得更好。

在 $V_n(x)$ 多取一级后，由文献[8]中的(2.13)及(2.18)式得出：

$$\left.
 \begin{aligned}
 u_0^{(0)}(x) &= \int F(x) dx, \\
 F(x) &= 3f''/2(r-f') + (5r^2ff''' - 5rff'f''' + 2rff''f'')/6(r-f')^4 \\
 &\quad + (3r^2ff'' - 3rf'f'f'')/6(r-f')^4, \\
 u_1^{(0)}(x) &= -f''/2(r-f'), \\
 &\quad \vdots \\
 V_2^{(0)}(x) &= (r-f')/2, \\
 V_2^{(1)}(x) &= -rff''/4(r-f')^2, \\
 V_0(x) &= V_0^{(0)}(x) + V_0^{(1)}(x) = -r^2 \int f(x) dx + rf^2(x)/2, \\
 V_1(x) &= V_1^{(0)}(x) + V_1^{(1)}(x) = 0.
 \end{aligned}
 \right\} \tag{7}$$

$$\left.
 \begin{aligned}
 &\quad \vdots \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}
 \right\} \tag{8}$$

这样，将(7)、(8)两式代入(4)、(5)式及(3)式，且忽略其余的高阶展开项 $V_n(x)T^n$ 、 $u_n(x)T^n$ ($n \geq 3$) 后，可以得到系统的定态几率分布：

$$P_{st}(x) = \int N \exp \left\{ -u_0^{(0)}(x) - u_1^{(0)}(x)[f(x) + y] - \frac{V_0(x)}{\varepsilon} - \frac{V_2(x)[y + f(x)]^2}{\varepsilon} \right\} dy. \tag{9}$$

(9)式及(7)、(8)两式即为统一展开理论关于定态几率分布的更精确的表达式。

3 更精确的统一展开理论在单模染料激光色损耗模型与色增益模型中的应用

单模染料激光色损耗模型的光强朗之万方程为^[7]:

$$dI/dt = 2(a_0 - I)I + 2IP(t) \quad (10)$$

$$\langle P(t) \rangle = 0, \quad \langle P(t)P(s) \rangle = D \gamma \exp(-\gamma|t-s|). \quad (11)$$

令 $x = \ln I$, 则(10)式等价于由下式描述的加法色噪声驱动系统

$$\dot{x} = 2(a_0 - e^x) + 2P(t). \quad (12)$$

取泵参数 $a_0 = 1$, 则有

$$f(x) = 2(1 - e^x).$$

应用(7)、(8)、(9)式可得该模型的光强定态几率分布的表达式为:

$$\begin{aligned} P_{st}(I, \tau) = & N(1 + 2\tau I) I^{1/2D-1} \exp\left(\frac{\tau}{2D}(2 - I)I - \frac{I}{2D}\right) \\ & \cdot \frac{(1 + 2\tau I)^{1/2}}{\sqrt{(1 + 2I) - 2\tau(1 - I)I/(1 + 2\tau I)^2}} \exp\left(\frac{\tau^3 I^2}{(1 + 2\tau I)^5}\right) \\ & \cdot \exp\left(\frac{1}{2\tau I + 1} - \frac{4 + 3\tau}{6(1 + 2\tau I)^2} - \frac{3 - 2\tau^2}{9(1 + 2\tau I)^3}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

式中 N 为归一化常数。

单模染料激光色增益模型的光强朗之万方程为:

$$dI/dt = 2[Ag/(1 + I) - a_l]I + [2I/(1 + I)]P(t) \quad (14)$$

(14)式中 Ag 为增益参数, a_l 为损耗参数, 乘法色泵噪声 $P(t)$ 的统计性质满足(11)式。

同理, 通过一长串计算后, 求得该模型的光强定态几率分布为:

$$\begin{aligned} P_{st}(I, \tau) = & N I^{(A_g - a_l)/2D-1} (1 + I + 2\tau a_l I) \exp\left(-\frac{2\tau a_l^2 + a_l I^2}{4D}\right) \\ & \cdot \exp\left(\frac{2\tau(A_g - a_l)a_l + A_g - 2a_l I}{2D}\right) \\ & \cdot \frac{(1 + I + 2\tau a_l I) \sqrt{1 + I + 2\tau a_l I}}{\sqrt{(1 + I + 2\tau a_l I)^3 + 2\tau^2 a_l (A_g - a_l - a_l I)I^2}} \\ & \cdot \exp\left[\frac{1 + I}{1 + I + 2\tau a_l I} - \frac{(1 + I)^2(4 + 3\tau)}{6(1 + I + 2\tau a_l I)^2} - \frac{(1 + I)^3(3 - 2\tau^2)}{9(1 + I + 2\tau a_l I)^3}\right]. \end{aligned} \quad (15)$$

本文用更精确的统一展开理论所得到的结果(13)和(15)式比文献[7]和文献[9]中用统一色噪声近似所得到的结果要多三个修正因子。对于色损耗模型, 这三个修正因子是:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + 2\tau I)^{1/2}}{\sqrt{(1 + 2\tau I) + 2\tau(1 - I)I/(1 + 2\tau I)^2}} \exp\left(\frac{\tau^3 I^2}{(1 + 2\tau I)^5}\right) \\ & \cdot \exp\left[\frac{1}{2\tau I + 1} - \frac{4 + 3\tau}{6(1 + 2\tau I)^2} - \frac{3 - 2\tau^2}{9(1 + 2\tau I)^3}\right]. \end{aligned}$$

对于色增益模型, 这三个修正因子是:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + I + 2\tau a_l I) \sqrt{1 + I + 2\tau a_l I}}{\sqrt{(1 + I + 2\tau a_l I)^3 + 2\tau^2 a_l (A_g - a_l - a_l I)I^2}} \exp\left(\frac{2D\tau^3 a_l^2 I^2}{(1 + I)(1 + I + 2\tau a_l I)^5}\right) \\ & \cdot \exp\left[\frac{1 + I}{1 + I + 2\tau a_l I} - \frac{(1 + I)^2(4 + 3\tau)}{6(1 + I + 2\tau a_l I)^2} - \frac{(1 + I)^3(3 - 2\tau^2)}{9(1 + I + 2\tau a_l I)^3}\right]. \end{aligned}$$

如果在整个计算过程中, $\psi_1(x, y)$ 的展开式中只取 $u_0^{(0)}(x)$ 这一项, 且在计算 $u_0^{(0)}(x)$ 的过程中不考虑 $V_2^{(1)}(x)$ 、 $V_3^{(1)}(x)$, 在计算 $V_2(x)$ 时不考虑 $V_2^{(1)}(x)$, 则在最后的结果中将不会出现上面的三个修正因子。

4 光强平均值及其相对涨落

根据光强的定态几率分布 $P_n(I, \tau)$, 可以进一步研究光强的各阶矩。光强 I 的各阶矩的定义为:

$$\langle I^n \rangle = \int_0^\infty I^n P_n(I, \tau) dI.$$

为了得到 $\langle I^n \rangle$ 的解析表达式, 在下面的讨论中不考虑(13)、(15)两式中的修正因子的贡献, 则对于色损耗模型有:

$$\langle I^n \rangle^{loss} = \left(\frac{D}{\tau}\right)^{n/2} \frac{\Gamma(\gamma + n)}{\Gamma(\gamma)} \cdot \frac{(1/\sqrt{D\tau})D_{-\gamma-n}[(1-2\tau)/2\sqrt{D\tau}] + 2(\gamma+n)D_{-\gamma-n-1}[(1-2\tau)/\sqrt{4D\tau}]}{(1/\sqrt{D\tau})D_{-\gamma}[(1-2\tau)/2\sqrt{D\tau}] + 2\gamma D_{-\gamma-1}[(1-2\tau)/2\sqrt{D\tau}]}, \quad (16)$$

其中 $\Gamma(x)$ 为伽玛函数, $D_{-\gamma}(x)$ 为抛物柱面函数^[14], 参数 $\gamma = a_0/D$, $a_0 = 1$ 。

当 $n = 1$ 、 $n = 2$ 时, 由(16)式得到光强的平均值和二阶矩为:

$$\langle I \rangle^{loss} = \left(\frac{D}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma)} \cdot \frac{(1/\sqrt{D\tau})D_{-\gamma-1}[(1-2\tau)/\sqrt{4D\tau}] + 2(\gamma+1)D_{-\gamma-2}[(1-2\tau)/2\sqrt{D\tau}]}{(1/\sqrt{D\tau})D_{-\gamma}[(1-2\tau)/2\sqrt{D\tau}] + 2\gamma D_{-\gamma-1}[(1-2\tau)/2\sqrt{D\tau}]}, \quad (17)$$

$$\langle I^2 \rangle^{loss} = \left(\frac{D}{\tau}\right) \frac{\Gamma(\gamma + 2)}{\Gamma(\gamma)} \cdot \frac{(1/\sqrt{D\tau})D_{-\gamma-2}[(1-2\tau)/2\sqrt{D\tau}] + 2(\gamma+2)D_{-\gamma-3}[(1-2\tau)/2\sqrt{D\tau}]}{(1/\sqrt{D\tau})D_{-\gamma}[(1-2\tau)/2\sqrt{D\tau}] + 2\gamma D_{-\gamma-1}[(1-2\tau)/2\sqrt{D\tau}]}, \quad (18)$$

而光强的相对涨落为

$$\lambda(0)^{loss} = \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2 - 1. \quad (19)$$

同理, 对于色增益模型, 可以求得光强的 n 阶矩、平均值和强度相对涨落为:

$$\langle I^n \rangle^{gain} = \frac{1}{(2\beta)^{n/2}} \frac{\Gamma(\gamma + n)}{\Gamma(\gamma)} \frac{D_{-\gamma-n} + [(\gamma+n)/\sqrt{2\beta}](1+2\tau a_i)D_{-\gamma-n-1}(\gamma/\sqrt{2\beta})}{D_{-\gamma}(\gamma/\sqrt{2\beta}) + (\gamma/\sqrt{2\beta})(1+2\tau a_i)D_{-\gamma-1}(\gamma/\sqrt{2\beta})}, \quad (20)$$

$$\langle I \rangle^{gain} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma)} \frac{D_{-\gamma-1}(\gamma/\sqrt{2\beta}) + [(\gamma+1)/\sqrt{2\beta}](1+2\tau a_i)D_{-\gamma-2}(\gamma/\sqrt{2\beta})}{D_{-\gamma}(\gamma/\sqrt{2\beta}) + (\gamma/\sqrt{2\beta})(1+2\tau a_i)D_{-\gamma-1}(\gamma/\sqrt{2\beta})}, \quad (21)$$

$$\lambda(0)^{gain} = \langle I^2 \rangle^{gain} / \langle I \rangle^{gain} \langle I \rangle^{gain} - 1. \quad (22)$$

值得一提的是, 令 $\tau = 0$, 则(20)、(21)和(22)式正好为文献[13]中的(3.3)、(3.4)和(3.5)式。

5 讨论和结论

1) 由于修正因子的作用, 本文所得到的结果(13)、(15)式较文献[7]和文献[9]中用统一色噪声近似得到的结果有明显的改善而与精确的数值结果和数值模拟结果^[10, 11]符合得更

好。例如，对于色损耗模型，当 $D = 0.5$, $\gamma = 1.0$ ($\tau = 1/\gamma$), $I = 0.5$ 时、更精确的统一展开理论的结果与精确的数值结果的相对误差为 1.7%，但统一色噪声近似的结果与精确的数值结果的相对误差为 6.9%。参见图 1 至图 3。

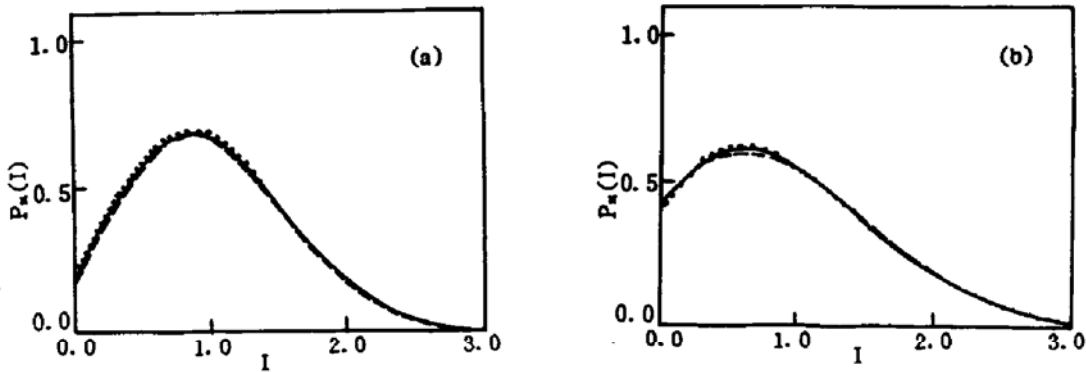


Fig. 1 Stationary intensity distributions for the colored-loss-noise model of a dye laser (a) $a_0 = 1.0$, $D = 0.5$, $\tau = 1.0$; (b) $a_0 = 1.0$, $D = 0.5$, $\tau = 0.5$. — UET; --- UCNA; ... exact numerical results

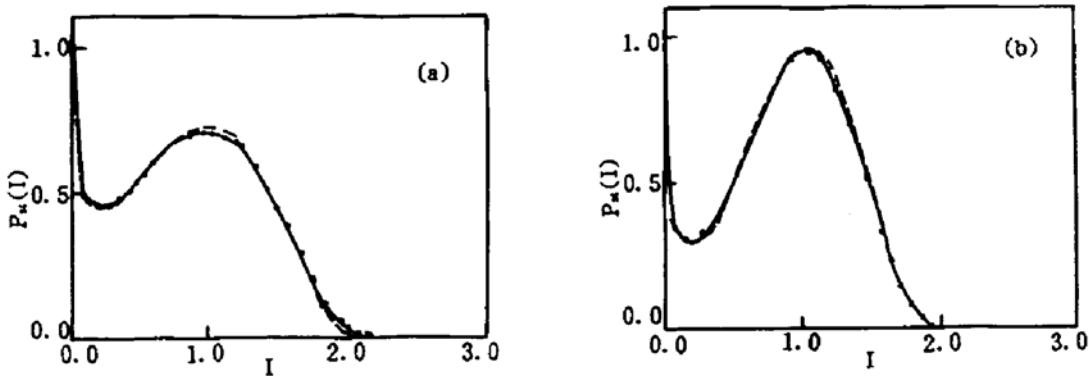


Fig. 2 Stationary intensity distributions for the colored-loss-noise model of a dye laser (a) $a_0 = 1.0$, $D = 1.5$, $\tau = 1.0$; (b) $a_0 = 1.0$, $D = 1.5$, $\tau = 2.0$. — UET; --- UCNA, ... simulation results

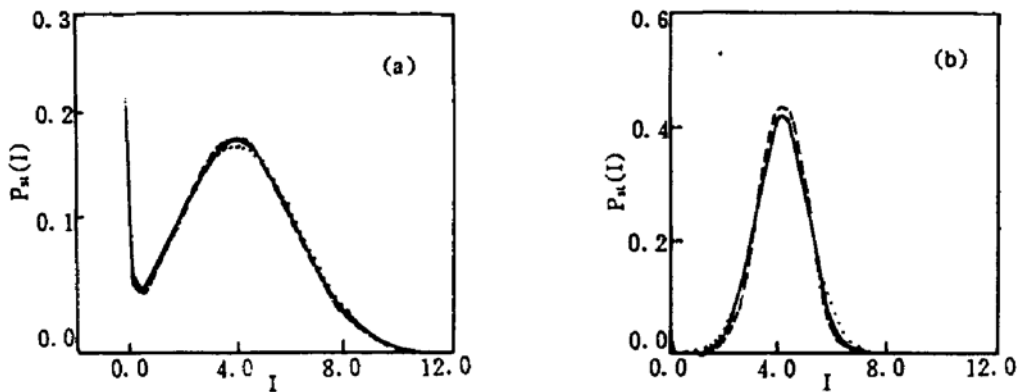


Fig. 3 Stationary intensity distributions for (a) colored-loss-noise model of a dye laser; (b) colored-gain-loss model of a dye laser. $a_1 = 1.0$, $A_s = 5.0$, $D = 5.0$, $\tau = 0.5$. — UET, --- UCNA, ... simulation results

2) 就对定态几率分布的贡献而言, $u_s^{(0)}(x)$ 与 $V_s^{(1)}(x)$ 是处于同一数量级上, 所以, 从理论本身的自恰性要求, 在计算 $u_s^{(0)}(x)$ 时, 不应忽略 $V_s^{(1)}(x)$ 。

3) 作为一种处理色噪声驱动系统的方法, 统一展开理论与统一色噪声近似方法一样, 它既可以用来处理小关联时间色噪声驱动系统, 也可以用来处理大关联时间色噪声驱动系统。而应用统一展开理论处理激光系统有两大优点, 即: 不必直接解福克-普朗克方程就可以得到光强定态几率分布及可以根据实际系统的需要选取展开项的项数, 以便达到更高的精度。

参 考 文 献

- [1] S. Zhu, A. W. Yu, R. Roy, Statistical fluctuations in laser transients. *Phys. Rev. A*, 1986, **34**(5) : 4333~4347
- [2] S. Zhu, Saturation effects in a laser with multiplicative white noise. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(5) : 3210~3215
- [3] S. Zhu, Steady-state analysis of two-mode laser with multiplicative white noise. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(11) : 8148~8153
- [4] S. Zhu, Saturation effects in a laser at steady state. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(7) : 4969~4973
- [5] Enrique Peacock-Lopez, F. Javier de la Rubia, Bruce J. West *et al.*, Dye-laser equation with saturation and its best Fokker-Plank equation. *Phys. Rev. A*, 1989, **39**(8) : 4026~4035
- [6] P. Jung, P. Hanggi, Dynamical system; A unified colored-noise approximation. *Phys. Rev. A*, 1987, **35**(10) : 4464~4466
- [7] P. Jung, P. Hanggi, Optical instabilities; New theories for colored-noise-driven laser instabilities. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1998, **5**(5) : 979~986
- [8] Hu Gang, Two-dimensional probability distribution of system driven by colored noise. *Phys. Rev. A*, 1991, **43**(2) : 700~706
- [9] Ling Lin, Li Cao, Dajin Wu, First-order-like transition for colored-noise saturation models of dye lasers. *Phys. Rev. A*, 1993, **48**(1) : 739~745
- [10] P. Jung, H. Risken, Distribution function for a nonlinear laser model with multiplicative colored noise. *Phys. Lett.*, 1984, **103A**(1) : 38~40
- [11] J. M. Sancho, M. San Miguel, S. L. Katz *et al.*, Analytic and numerical studies of multiplicative noise. *Phys. Rev. A*, 1982, **26**(3) : 1589~1609
- [12] Li Cao, Dajin Wu, Ling Lin, First-order-like transition for colored-noise saturation models of dye lasers; Effects of quantum noise. *Phys. Rev. A*, 1994, **49**(1) : 505~616
- [13] M. Aguado, E. Hernandez-Garcia, M. San Miguel, Dye-laser fluctuations; Comparison of colored-loss-noise and white gain-noise models. *Phys. Rev. A*, 1988, **38**(11) : 5670~5677
- [14] I. S. Gadshten, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic, New York, 1980

Application of the Unified Expansion Theory to Laser Systems

He Jian Cao Li Wu Dajin

(National Laboratory of Laser Technology, Physics Department,
Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

(Received 27 June 1994)

Abstract In the frame of the unified expansion theory (UET) we obtain the higher precision expressions of the UET by means of improving the accuracy of calculation, and then extend it to the laser systems. Two single-mode dye-laser models are studied by the modified UET, and the expressions of stationary probabilities, means and variances laser intensity are obtained. Comparison shows that the results of the modified UET agree well with the exact numerical results and the simulation results better than the results of the unified colored-noise approximation (UCNA).

Key words dye laser, unified expansion theory, the mean of the intensity, the variance of the intensity.