第15卷 第10期
1995年10月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 15, No. 10
October, 1995

反射和折射电磁波的横向移动

刘新芽
(中国高等科学技术中心和南昌大学物理系，南昌 330047)

摘 要 推导了介质界面反射和折射电磁波的能量中心横向移动的计算式，它表明，横向移动的量值与入射波束的线度、入射角及介质的介电常数、磁导率有关。

关键词 电磁波， 反射和折射， 横向移动。

自 1955 年，Picht 和 Fedorov 分别预言了全反射光束除了纵向移动外还必定存在横向移动后，人们对横向移动进行了大量的实验和理论研究。1972 年 Imbert 首次观察到全反射光束的横移现象，接着，许多其它的实验也证实了横移的存在。对横移的理论研究有几种不同的方法。其中有能通量法与平稳相位法[1]。关于横移的存在条件及横移的量值，两种理论有不同的结果。另一种方法是从自由电磁场的守恒定律出发讨论反射、折射波能量中心的横移与场的内部角动量的变化或与 Abraham 动量的关系[2]。本文作者根据广义变分原理处理了介质界面电磁波的反射、折射问题，并从约束系统在坐标变换下的变换性质导出了反射、折射波能量中心运动方程，严格证明了横移的存在[3]。最近，又证明了横移是由电磁波在反射、折射时发生自旋-动量耦合而引起的[4]。

本文推导反射、折射电磁波横移量值的计算式。结果表明，横移量与入射波束的线度、入射角及介质的介电常数、磁导率有关。

1 横移方程

考虑一束准单色电磁波从介质 1 入射到平面界面并部分地透射到介质 2 的情形。假定介质 1 和 2 都为静止且各向同性的透明电介质、相对介电常数和相对磁导率分别为 ε_1、μ_1 和 ε_2、μ_2，为 简单起见不考虑色散。电磁波的独立的边界条件为

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0,\qquad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=0. \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为界面法矢，指向介质1。如下选取右手笛卡尔坐标系：x_3 轴沿 $\boldsymbol{n}$ 方向且界面为 $x_3=0$，x_1 轴沿电磁波入射面的法线方向。引入 4- 势 $A^\alpha(\boldsymbol{A},\ i\varphi)$，根据场与势的关系，可将(1) 式改写成如下四个约束条件(取 $c=1$)：

$$G_1=A^4_{1,1}-A^1_{1,4}-A^4_{2,1}+A^1_{2,4}=0,\qquad G_2=A^4_{1,2}-A^2_{1,4}-A^4_{2,2}+A^2_{2,4}=0, \tag{2}$$

$$G_3=A^3_{1,2}/\mu_1-A^2_{1,3}/\mu_1-A^3_{2,2}/\mu_2+A^2_{2,3}/\mu_2=0,$$

收稿日期:1994 年 5 月 26 日；收到修改稿日期:1994 年 10 月 28 日

$$G_4 = A^1_{1,3}/\mu_1 - A^3_{1,1}/\mu_1 - A^1_{2,3}/\mu_2 + A^3_{2,1}/\mu_2 = 0. \tag{3}$$

式中 $A^\alpha_{j,\nu} = \partial A^\alpha_j/\partial x_\nu (\alpha = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2;\ \nu = 1, 2, 3, 4;\ x_\nu = (\boldsymbol{x}, it))$。

自由电磁场的拉格朗日函数可选为

$$L^{(j)} = -(A^\alpha_{j,\nu} A^\alpha_{j,\nu})/2 \tag{4}$$

依据广义变分原理，广义作用量可写成：

$$I^* = \int (L^{(j)} + \lambda_r G_r) d^4 x, \qquad (r = 1, 2, 3, 4). \tag{5}$$

式中 λ_r 为拉格朗日乘子，G_r 为约束条件(2) 式和(3) 式，由 $\delta I^* = 0$ 及 A^α_j 和 λ_r 的独立性可得[3]

$$(\partial L^{(j)}/\partial A^\alpha_{j,\nu} + \lambda_r \partial G_r/\partial A^\alpha_{j,\nu})_{,\nu} = 0, \qquad (x_3 > 0 \text{ 或 } x_3 < 0), \tag{6}$$

$$G_r = 0, \qquad (x_3 = 0) \tag{7}$$

$$\partial L^{(j)}/\partial A^\alpha_{j,3} + \lambda_r \partial G_r/\partial A^\alpha_{j,3} = 0, \qquad (x_3 = 0) \tag{8}$$

$$\partial L^{(j)}/\partial A^\alpha_{j,4} + \lambda_r \partial G_r/\partial A^\alpha_{j,4} = 0. \qquad (\text{当波束投射到界面时}) \tag{9}$$

其中(6)式是电磁场的运动方程，(7)式是约束条件，(8)式和(9)式用于识别 λ_r。

在分析了上述受约束的电磁系统在坐标变换下的变换性质之后可以得到电磁场能量中心运动方程

$$H\, dX_i/dt - (\Delta^{(1)}_4 + \Delta^{(2)}_4) X_i = P_i - (\Delta^{(1)}_i + \Delta^{(2)}_i) x_4 + \int (A^i_{,44} A^4 - A^4_{,44} A^i) dv - \Delta^{(1)}_{i4} - \Delta^{(2)}_{i4}, \tag{10}$$

其中 H 和 P_i 分别是能量和动量分量，X_i 是能量中心坐标，并且

$$\Delta^{(j)}_\mu = \int_{v_j} [\partial_4 (\lambda_r \frac{\partial G_r}{\partial A^\alpha_{j,4}} A^\alpha_{j,4}) - \lambda_r \frac{\partial G_r}{\partial A^\alpha_{j,\nu}} A^\alpha_{j,\mu\nu}] dv, \tag{11}$$

$$\Delta^{(j)}_{\rho\mu} = \int_{v_j} \{\partial_4 [\lambda_r \frac{\partial G_r}{\partial A^\alpha_{j,4}} (D^{\alpha\beta}_{\rho\mu} A^\beta_j + x_\rho A^\alpha_{j,\mu} - x_\mu A^\alpha_{j,\rho})]$$
$$- \lambda_r \frac{\partial G_r}{\partial A^\alpha_{j,\nu}} \partial_\nu (D^{\alpha\beta}_{\rho\mu} A^\beta_j + x_\rho A^\alpha_{j,\mu} - x_\mu A^\alpha_{j,\rho})\} dv. \tag{12}$$

式中 $D^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}$ 是洛仑茨群的张量表示的元素。

现在讨论频率为 ω 的单色入射波。采用势的辐射规范条件：$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$、$A^4 = 0$，并假定在反射和折射过程中波的频率不变。对(11) 和(12) 式进行严格计算，然后代入(10) 式并令 $i = 1$，即得能量中心横向移动方程[4]

$$H dX_1/dt = - k^{(1)}_2 s^{(1)}_3 - k^{(2)}_2 s^{(2)}_3, \tag{13}$$

其中 $k^{(1)}_2$ 和 $k^{(2)}_2$ 分别为反射和折射波的波矢在 x_2 轴上的分量，$s^{(1)}_3$ 和 $s^{(2)}_3$ 分别为反射和折射波的自旋在 x_3 轴上的分量。(13)式表明，在界面上反射和折射时，电磁波的自旋和动量发生耦合，引起能量中心横移。

2 横移的计算式

依据定义，能量中心的移动速度为

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{1}{H} \int \mathscr{H} \frac{dx_i}{dt} dv, \tag{14}$$

其中

$$H = \int \mathscr{H}\, dv \tag{15}$$

为总能量，积分区域 $v = v_1 + v_2$，包含介质 1 和 2 所占据的两部分空间。因此

$$HdX_i/dt = H^{(1)}dX_i^{(1)}/dt + H^{(2)}dX_i^{(2)}/dt. \tag{16}$$

式中右边第一项仅与反射波有关，第二项仅与折射波有关。对于频率为 ω 的入射波，令 $i=1$，由(13)式知

$$H^{(1)}dX_1^{(1)}/dt = -k_2^{(1)}s_3^{(1)}, \qquad H^{(2)}dX_1^{(2)}/dt = -k_2^{(2)}s_3^{(2)}, \tag{17}$$

(17)式分别是反射波与折射波的横移方程。它们表明，自旋与动量耦合引起横向能流。设反射角为 θ'，折射角为 θ''，则

$$k_2^{(1)} = k^{(1)}\sin\theta' = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\sin\theta', \qquad k_2^{(2)} = k^{(2)}\sin\theta'' = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\sin\theta'' \tag{18}$$

其中 ω 为电磁波的频率，ε 和 μ 分别是介电常数和磁导率。频率为 ω 的电磁波的自旋的量值与能量的关系为[5]

$$|\mathbf{s}| = H/\omega. \tag{19}$$

自旋的取向与波的极化有关，纵向极化时自旋与动量平行或反平行，横向极化时自旋与动量垂直。在自旋与动量平行时

$$s_3^{(1)} = H^{(1)}\cos\theta'/\omega, \qquad s_3^{(2)} = -H^{(2)}\cos\theta''/\omega \tag{20}$$

将(18)和(20)式代入(17)式，得到：

$$dX_1^{(1)}/dt = -(\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\sin 2\theta')/2, \qquad dX_1^{(2)}/dt = (\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\sin 2\theta'')/2 \tag{21}$$

(21)式表明，反射波沿 x_1 轴负方向移动，折射波沿 x_1 轴正方向移动，二者方向相反。移动的速度与反射角、折射角及介质的介电常数、磁导率有关，与波的频率无关。

(16)式可以改写为

$$dX_1/dt = RdX_1^{(1)}/dt + TdX_1^{(2)}/dt, \tag{22}$$

其中 $R = H^{(1)}/H$、$T = H^{(2)}/H$，分别是反射系数和折射系数，而且 $R + T = 1$。

下面来推导横移的算式。由于横移的速度与波的频率无关，入射波束中入射角相同的分波在反射、折射时横移是相同的。设入射波束以入射角 θ 投射到界面上。波束可用三个相互垂直的单位矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 来表征，其中 $\boldsymbol{a}$ 沿 x_1 轴正方向，而 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ 沿波的传播方向，第三个方向为 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{m}$。波束的尺寸可用它在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 三个方向上的线度 D_a、D_m 和 D_b 来表示。入射波束与界面的接触时间和 D_m 及 D_b 有关。对于 $D_m \gg D_b$ 的入射波束，在反射、折射过程中它与界面的接触时间为

$$\Delta t = D_m/v^{(1)}, \tag{23}$$

其中 $v^{(1)}$ 是介质 1 中电磁波束的群速，介质是非色散的，群速等于相速，即

$$v^{(1)} = 1/\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}, \tag{24}$$

Δt 也就是反射波和折射波经受界面作用的时间。因此，当入射波束中的每一分波都以 θ 角投射到界面时，对于 $D_m \gg D_b$ 的入射波束，反射波和折射波的横移分别为：

$$\Delta X_1^{(1)} = -(D_m/2)\,\mu_1\varepsilon_1\sin 2\theta', \qquad \Delta X_1^{(2)} = (D_m/2)\,(\mu_1\varepsilon_1\,\mu_2\varepsilon_2)^{1/2}\sin 2\theta''. \tag{25}$$

式中 θ' 为反射角，θ'' 为折射角。对于 $D_b \gg D_m$ 的入射波束，因 $\Delta t = D_b \operatorname{tg}\theta/v^{(1)}$，反射波和折射波的横移分别为

$$\Delta X_1^{(1)} = -(D_b/2)\,\mu_1\varepsilon_1\operatorname{tg}\theta\sin 2\theta', \qquad \Delta X_1^{(2)} = (D_b/2)\,(\mu_1\varepsilon_1\mu_2\varepsilon_2)^{1/2}\operatorname{tg}\theta\sin 2\theta'', \tag{26}$$

反射波和折射波总的能量中心的横移为：

$$\Delta X_1 = R\Delta X_1^{(1)} + T\Delta X_1^{(2)} \tag{27}$$

当入射波束中的各分波的入射角不全相同但与 θ 偏离不大时，(25) 式 ～ (27) 式近似成立。反射角和折射角可按反射和折射定律换成入射角表示：$\theta' = \theta$，$\sin\theta'' = \sqrt{\mu_1\varepsilon_1/\mu_2\varepsilon_2}\sin\theta$。

3 结语与讨论

从广义变分原理出发严格地证明了反射和折射电磁波横移的存在，并指出了导致横移的物理原因为在反射和折射过程中电磁波的自旋和动量发生耦合引起能量中心横向移动。本文推导了横移的计算式，它们适用于各分波的入射角相同或相近的入射波束，而且各分波的自旋须与其动量平行。对于自旋与动量反平行的情形，(20)式各增加一个负号，因而(25)～(27)各式也相差一个负号。本文的基本方程式(13)本质上是横向的能通量方程。令

$$F_1 = -k_2^{(1)}s_3^{(1)} - k_2^{(2)}s_3^{(2)},$$

则 $\Delta X_1 = \frac{1}{H}\int_{t_1}^{t_2} F_1 dt$。这正是文献[2]中的横向移动方程(22)。不同之处在于，本文的(13)式揭示了导致能量中心横移的物理机制是电磁波的自旋与动量耦合。此外，方程式(13)含有电磁波自旋沿界面法向的分量 s_3，这与文献[2]的另一个横移方程(20)相类似，区别在于，文献[2]中出现的是“内禀角动量”。

方程式(13)与能通量法和平稳相位法所得方程的根本区别在于物理机制。自旋在横移现象中起作用这一点曾有人想到过(例如 de Beauregard 1965)，文献[3]、[4]和本文通过广义变分途径将此显示出来了。

参 考 文 献

[1] V. H. Schilling, Die Strahlversetzung bei der Reflexion Linear oder elliptisch polarisierter ebener Wellen an der Trennebene zwischen absorbierenden Medien. *Ann. Phys.*, 1965, **16**(3～4): 122～134

[2] V. G. Fedoseyev, Conservation Laws and transverse motion of energy on reflection and transmission of electromagnetic waves. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1988, **21**(9): 2045～2059

[3] Liu Xinya, Some properties of electromagnetic waves near the interface of dielectric media. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1991, **24**(7): L323～L327

[4] Xinya Liu, Transverse motion of energy on reflection and refraction of electromagnetic waves. has been accepted for publication in *Commun. Theor. Phys.*, 1995, **24**

[5] Д. 伊凡宁柯, A. 索科洛夫著(黄祖洽译), 经典场论. 第一版, 北京, 科学出版社, 1958: 161

Transverse Shift of Reflected and Refracted Electromagnetic Waves

Liu Xinya
(*CCAST and Department of Physics, Nanchang University, Nanchang* 330047)
(Received 26 May 1994; revised 28 October 1994)

Abstract A formula for the transverse shift of the centre of energy of the reflected and refracted electromgnetic waves on the interface of dielectric media is derived. It shows that the value of transverse shift depends on the dimension of the incident wavebeam, the angle of incidence, the dielectric permittivities and the magnetic conductivities of media.
Key words electromagnetic wave, reflection and refraction, transverse shift.