第15卷 第10期
1995年10月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 15, No. 10
October, 1995

# 负二进制编码的光学阵列化复数运算

李国强 刘立人 邵岚
（中国科学院上海光学精密机械研究所，上海 201800）

**摘 要** 建立一套新颖的光学负二进制并行算法体系，包括加权-移位加法、列阵乘法等。一切运算无符号位、无进位、无再编码。利用两层阵列可实现高精度的复数运算，三层阵列可实现复数矩阵-矢量运算。该算法体系非常适合于光学执行。相应地，文中给出了两层列阵复数相乘光学系统及实验结果。原理上，该算法是可级联的。

**关键词** 数字光计算， 并行处理， 数字编码， 列阵处理.

## 1 引 言

矩阵运算处理器是典型的能显示光学并行特性的专用目的光计算系统，已引起了人们极大的兴趣。其中数字编码是重要的因素之一，它决定了基本的算法和体系结构。已报道的能处理正负数的编码主要有余数码[1]、原码[2]、MSD码[3]、二的补码[4]等。它们所对应的算法或光学实现都存在着困难[5]。

本文提出了负二进制编码的并行算法。利用加权-移位加法完成两数相减，一切正负数的加减运算一步完成，无符号位、无进位、无再编码；文中还引入了列阵乘法的概念，利用二维列阵可并行得到混合负二进制表示的乘积。由于输出与输入的形式相同，原理上该算法是可级联的。由四个实数乘法列阵可方便地实现两层列阵的复数运算。最后给出了基于自由空间光互连的光学实验结果。

## 2 并行算法

在负二进制[6]中，任一正负数 $a$ 都有唯一的表达式：

$$a = \sum_{i=-M}^{N-1} a_i(-2)^i, \qquad a_i \in \{0,1\}, \tag{1}$$

其中 $M,N$ 为正整数。在这个 $(M+N)$ 的数字串中，每位数字 $a_i$ 的权重带有正负特性，因而 $a$ 的正负极性隐含在其中，无需特定的符号位。整数和小数部分分别由正、负指数位表达。

设 $a$、$b$ 是两个由(1)式编码的 $(M+N)$ 比特的实数。先讨论基本的运算算法。

### 2.1 加法

若 $a$、$b$ 的和为 $u$，在并行求和过程中，$u$ 的每一位 $u_i$ 是 $a$、$b$ 的第 $i$ 位之和。这样 $u$ 表示成混

* 中家自然科学基金资助课题。

收稿日期：1994年6月9日；收到修改稿日期：1994年10月28日

合负二进制的形式，每位数字可以多值化。这种无进位并行加法可写成：

$$u=\sum_{i=-M}^{N-1}u_i(-2)^i, \tag{2}$$

其中 $u_i=a_i+b_i\,(i=-M,\,-M+1,\,\cdots,N-2,N-1)$.

### 2.2 减法

通常减法不易由光学直接执行，有些算法通过补码操作使之转变为加法。然而在负二进制编码下，有一种不需要求补或再编码的简洁方法。$a-b$ 可写成下列和式：

$$V=\sum_{l=-m}^{n-1}a_i(-2)^i+\sum_{i=-m}^{n-1}(b_i/2)(-2)^{i+1}. \tag{3}$$

式中 $b$ 的每位数字 $b_i$ 都升高了一位(左移一位)，而其值降为 $b_i/2$ 。正是这种简单的加权-移位操作使减法转化为加法。这是负基制编码的独特优点。方程(3)可重写为

$$V=\sum_{i=-M}^{N}V_i(-2)^i, \tag{4}$$

其中 $V_i=a_i+b_{i-1}/2\ (i=-M,\,-M+1,\,\cdots,N)$, $a_N=0$, $b_{-M-1}=0$. 这样，两个$(M+N)$位的数之差表示成$(M+N+1)$位混合负二制的形式。类似地，也可以将 $b$ 的每位数字 $b_i$ 降低一位，而其值升为 $2b_i$ 。

### 2.3 并行阵列乘法

在数字化乘法中，乘积 $P$ 的每一位都是由乘数和被乘数的卷积得到的[7]：

$$P=\sum_{i=-2M}^{2n-2}P_i(-2)^i, \tag{5}$$

其中 $P_i=\sum_{k=-M}^{N-1}a_kb_{i-k}\ (i=-2M,\,-2M+1,\cdots,2N-2)$。基于外积概念[8]，上述卷积可用图1所示的均一化并行阵列实现。在阵列中，从左上角起每一行和列都依次带上权重因子 $(-2)^{-M}$, $(-2)^{-M+1}\cdots(-2)^{N-1}$。图中示出了 $M=2$, $N=4$ 的情形。行和列分别表示被乘数和乘数，它们的数字编码正交输入。在交叉处通过与操作并行产生所有的乘积项，而每条对角线方向上的乘积项权重相等，对它们分别同时累加便得到了一个新的数字串，它是混合负二进制的乘积结果。本质上，由于运算中所包含的单个的相乘与相加一步完成，这种并行操作提高了运算速度。

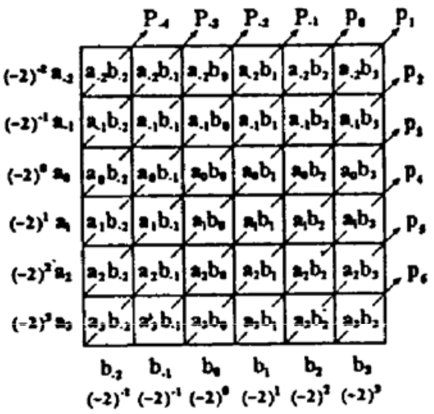

Fig. 1 Parallel array multiplication

### 2.4 复数乘法

基于以上基本算法，复数运算是可行的。设 $a=a_1+ja_2$, $b=b_1+jb_2$, 其中 $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ 四个实数分别由(1)式编码，乘积为

$$P=[a_1b_1+(-a_2b_2)]+j(a_1b_2+a_2b_1).$$

下用上标表示数字位序。根据(2式、(3)式和(5)式，可得

$$\mathrm{Re}[P]=\sum_{i=-2M}^{2N-2}(-2)^i\sum_{k=-M}^{N-1}\left[a_1^kb_1^{i-k}+(a_2^kb_2^{i-k-1}/2)\right],$$

$$(b_1^k=0,\ b_2^{-M-1}=0) \tag{6}$$

$$\mathrm{Im}[P]=\sum_{i=-2M}^{2N-2}(-2)^i\sum_{k=-M}^{N-1}(a_1^kb_2^{i-k}+a_2^kb_1^{i-k}).$$

为了并行完成这些运算，可采用四个子阵列构成的两层阵列结构。图2示出了功能块及它们的互连关系。

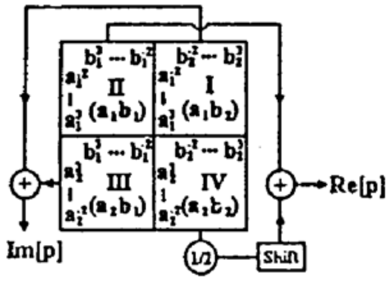


Fig. 2 A two-stage array complex multiplier architecture

## 3 实　　验

在光学实现上，采用外积阵列成像结构和非相干光相关器组成的光学系统(见图 3)。该系统分三部分。

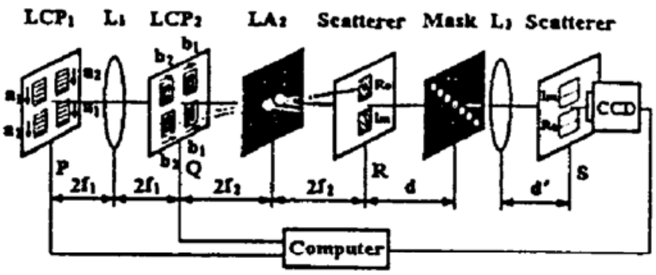


Fig. 3 Optical configuration for the two-stage array complex multiplication

第一部分(P-Q)形成四个乘积阵列。复数 $a$ 和 $b$ 分别由两块液晶显示屏(LCP)上的四个子阵列表示。在 $LCP_1$ 上 $a$ 的数字水平展开；在 $LCP_2$ 上，$b$ 的数字垂直展开。箭头指向高位。前者成像到 $LCP_2$ 上，并且互相匹配。透过 $LCP_2$ 的图案便是它们对应点相乘的结果，这样得到四个乘积项阵列。注意到为使 $a_2b_2$ 子阵列的每一项升一位，$LCP_1$ 右上方的 $a_2$ 子阵列要左移一位，而 $LCP_2$ 左下方的 $b_2$ 子阵列要右移一位。除以 2 的操作可通过使 $a_2$ 或 $b_2$ 子阵列的光强降低一半来实现。

第二部分(Q-R)是两个透镜阵列多重成像系统[9]，它使上述四个乘积项子阵列中的两者的对应项分别相加，产生两个多值化的新的子阵列，一个对应实部，另一个对应虚部。为提高对比度，莱射屏上放置一块模板，以挡去杂散光。

第三部分(R-S)的相关器[10]使实部和虚部两个阵列对角线上的元素分别累加，得到混合负二进制表示的乘积结果。模板对角线方向可以透光，通光孔数与子阵列的主对角线对应。在相关面上，有两行相关点分别对应乘积的实部和虚部，并由 CCD 探测器接收。微机完成混合负二进制结果的加权求和。

实验中，有关参数如下：$f_1=240$ mm，$f_2=90$ mm，$d=110$ mm，$d'=58$ mm。LCP 上每个像素大小约 1 mm，子阵列的中心间距为 100 mm，透镜阵列上两透镜间距 50 mm。对 9 位整数进行了演示 ($M=0$)。与之相应的实数范围是[$-170$，341]。任取 $a=341-j170$，$b=300+j100$，其负二进制表达为 $a$：$101010101+j010101010$；$b$：$101111100+j110100100$. 图 4(a)是相关面上的数值模拟，对应于十进制结果 $119300-j16900$ 。图 4(b)是实验结果，与数值模拟基本衔合。

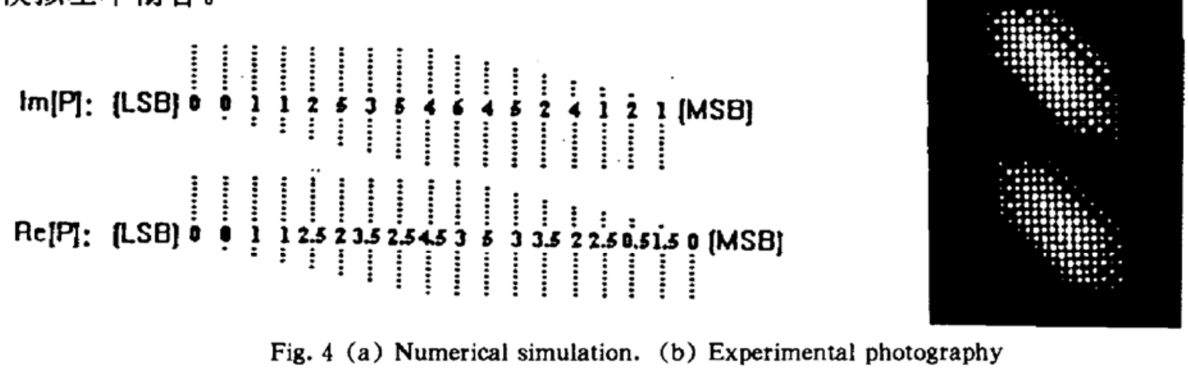


Fig. 4 (a) Numerical simulation. (b) Experimental photography

实验中的运算精度可简单分析如下：若混合负二进制乘积的每位数字的最大灰阶值为 $L$，

只要光电探测器能分辨出半个灰阶，就能准确地判读出所有数值点。因此，系统中像素的孔径、照明光源强度、透镜像差等产生的误差总和必须小于 $0.5/L$ 。通常的光学系统往往都满足这一要求。

**结 论** 基于负二进制编码，本文提出了一套并行算法体系及光学实现。一切运算无符号位、无进位、无再编码。利用二层阵列结构实现了复数运算。

根据以上算法，可研制栈式集成光电子复数乘法器模块。利用列阵化的模块及脉动数据输入方法即可完成复数矩阵-矢量运算。

值得注意的是，该算法体系的输出表示成混合负二进制的形式，与输入相似。唯一区别是每位数字可以多值化。因此，原理上它可以作为下一级处理器的输入。与传统的二的补码算法相比，这是一个优点。该体系中所需要的预处理仅仅是使十进制转化为负二进制[11]，后处理是对混合负二进制结果加权求和成为十进制乘积。若需要，可再转化为负二进制。

## 参 考 文 献


[1] A. Huang, Y. Tsunoda, J. Goodman *et al.*, Optical computation using residue arithmetic. *Appl. Opt.*, 1979, **18**(2) : 149～162

[2] D. Casasent, B. Taylor, Banded-matrix high-performance algorithm and architecture. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(10) : 1476～1480

[3] B. Drake, R. Bocker, M. Lasher *et al.*, Photonic computing using the modified signed-digit number representation. *Opt. Eng.*, 1986, **25**(1) : 38～43

[4] R. Bocker, Electrooptical matrix multiplication using the twos complment arithmetic for improved accuracy. *Appl. Opt.*, 1983, **12**(13) : 2019～2021

[5] 李国强，刘立人，邵 岚， 两层列阵二的补码复数并行算法及其光学实现。*光学学报*，1995，**15**(5) : 580～585

[6] M. Regt, Introduction to negative radix number systems. *Comput. Desigm*, 1967, **6**(5) : 53～60

[7] D. Psaltis, D. Casasent, D. Neft *et al.*, Accurate numerical computation by optical convolution. *Proc. SPIE*, 1980, **232** : 151～156

[8] R. Athale, W. Collins, P. Stilwell, High accuracy matrix multiplication with outer products optical processor. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(3) : 368～370

[9] L. Liu, X. Liu, Cascadable binary pattern logic processor using multiple-imaging. *Opt. Commun.*, 1991, **82**(5, 6) : 446～452

[10] L. Liu, Optoelectronic implementation of mathematical morphology. *Opt. Lett.*, 1989, **14**(10) : 482～484

[11] S. Zohar, Negative radix conversion. *IEEE Trans. on Comput.*, 1970, **C19**(3) : 222～226


# Negabinary-Coded Optical Parallel Array Complex Operation


Li Guoqiang Liu Liren Shao Lan

(*Shanghai Institute of Optics and FIne Mechanics*, *Academia Sinica*, *Shanghai* 201800)



(Received 9 June 1994; revised 28 October 1994)



**Abstract** A negabinary based algorithm including weighted-shifted addition and parallel array multiplication is suggested. On this basis, a two-stage array architecture is proposed to carry out complex operation. All the operations are performed without signs, carries, recodes and decimal point indications. Correspondingly, a parallel optical experiment is demonstrated.



**Key words** digital optical computing, parallel processing, digital enconding, array processing.