

# 透镜组合实现光学分数傅里叶变换

刘树田 徐建东 张 岩 李淳飞

(哈尔滨工业大学应用物理系, 哈尔滨 150001)

**摘 要** 从光学系统脉冲响应函数理论的角度分析了透镜组合实现光学分数傅里叶变换的结构及标准焦距的物理意义, 推导了几种较普遍的实现光学分数傅里叶变换的结构, 利用该结构可以方便地改变其标准焦距, 这对设计由多级分数傅里叶变换级联构成的空间变化滤波系统具有重要的指导意义。

**关键词** 光学分数傅里叶变换, 脉冲响应函数, 光学信息处理。

## 1 引 言

光学分数傅里叶变换是目前光学信息处理研究领域中的一个崭新的概念。1993年 Mendlovic 与 Ozaktas<sup>[1]</sup> 首次将分数傅里叶变换引入光学领域, 并采用渐变折射率介质(GRIN)光学理论给出了这一概念在光学系统中的定义。随后, Lohmann<sup>[2]</sup> 采用 Wigner 分布函数定义了光学分数傅里叶变换, 并给出了利用单透镜和双透镜实现光学分数傅里叶变换的结构。由于光学分数傅里叶变换是传统的傅里叶变换在分数级次(或更广义的连续级次)上的推广, 同时与其它光学变换, 如 Gabor 变换、子波(Wavelet)变换以及菲涅尔变换等一样具有传统傅里叶变换所不具备的空间-频率(或时间-频率)联合表象的信息提取与处理能力, 可以预计关于光学分数傅里叶变换的研究, 特别是由它演生出来的许多运算, 如分数卷积、分数相关及空间变化性滤波, 对光学信息处理的进一步发展具有重要的理论意义。

本文首次采用光学系统的脉冲响应函数理论较详细推导了透镜组合线性光学系统中实现光学分数傅里叶变换的结构。虽然由于光束的传播和聚焦的双重作用限制了光学分数傅里叶变换只能存在于某些特定的结构中, 但这种特定结构却存在于多种透镜组合系统中。由于普遍结构的存在, 可以方便地改变分数傅里叶变换的标准焦距, 从而对设计由多级光学分数傅里叶变换构成的空间变化滤波系统具有指导意义。

## 2 光学分数傅里叶变换的一般表述形式

分数傅里叶变换的概念源于分数微分和积分。原则上讲, 任何整数级次运算均可以分解为有实在意义的分数级次(或更广义的连续级次)的运算, 如  $X^2 = X^{1/2} X^{3/2}$ 。由于分数积分运算的存在, 因而傅里叶变换算符  $\mathcal{F}^1$  可以分解  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  … 等级次的分数傅里叶变换算符的乘积,

即  $\mathcal{F}^\alpha \cdot \mathcal{F}^\beta \cdot \mathcal{F}^\gamma \dots$ , 只要  $\alpha + \beta + \gamma + \dots = 1$ 。

将傅里叶变换对写成算符的形式：

$$\mathcal{F}^1 f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp(-i2\pi x x') dx', \quad \mathcal{F}^{-1} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp(i2\pi x x') dx' \quad (1)$$

其中  $x, x'$  为傅里叶变换对的共轭变量。算符  $\mathcal{F}^1$  的本征函数为高斯-厄密(Gaussian-Hermite)函数, 即

$$\mathcal{F}^1 \exp(-x^2/2) H_n(x) = \exp(in\pi/2) \exp(-x^2/2) H_n(x) \quad (2)$$

此处  $H_n(x)$  为  $n$  阶厄密多项式。分数傅里叶变换算符  $\mathcal{F}^\alpha$  具有相同的本征函数：

$$\mathcal{F}^\alpha \exp(-x^2/2) H_n(x) = \exp(in\alpha\pi/2) \exp(-x^2/2) H_n(x), \quad (3)$$

其中  $\alpha$  可以取任何数值, 本文仅限于讨论  $\alpha$  为实数时的情形。将(3)式写成积分的形式为<sup>[3]</sup>：

$$\mathcal{F}^\alpha f(x) = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp\{i\pi[x^2 \cot(\phi_\alpha) - 2xx' \csc(\phi_\alpha) + x'^2 \cot(\phi_\alpha)]\} dx' \quad (4)$$

其中  $\phi_\alpha = \alpha\pi/2, c = \exp(-i\pi/4 + i\phi_\alpha/2) / \sqrt{|\sin(\phi_\alpha)|}$  为复常数。分数傅里叶变换需满足以下两条公理：

$$\mathcal{F}^\alpha [\mathcal{F}^\beta f(x)] = \mathcal{F}^\alpha \mathcal{F}^\beta f(x) = \mathcal{F}^\beta \mathcal{F}^\alpha f(x) = \mathcal{F}^{\alpha+\beta} f(x) \quad (5)$$

$$\mathcal{F}^\alpha f(x) = \mathcal{F}^1 f(x), \quad \alpha = 1. \quad (6)$$

由于渐变折射率介质传播的本征模式为  $\exp(-x^2/2)H_n(x)$ , 所以 Ozaktas 的光学分数傅里叶定义是显而易见的。Lohmann 则认为分数傅里叶变换可以通过 Wigner 公布函数旋转  $\alpha\pi/2$  来获得。参照透镜的傅里叶变换的表达形式：

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi \frac{x_f x}{\lambda F}) dx, \quad (7)$$

其中  $F$  为透镜焦距,  $x_f$  为谱平面坐标, 可以证明光学分数傅里叶变换可以写成：

$$\mathcal{F}^\alpha\{f(x)\} = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda F_{1\alpha}} [x^2 \cot(\phi_\alpha) - 2xx_f \csc(\phi_\alpha) + x_f^2 \cot(\phi_\alpha)]\right\} dx, \quad (8)$$

在其后的理论推导中证明了这种形式是正确的。式中  $F_{1\alpha}$  与(7)式中的  $F$  类比可知它类似透镜焦距, 称之为标准焦距。当  $\alpha = 1$  时,  $\phi_\alpha = \pi/2, \lambda F_{11}$  为傅里叶变换谱平面的坐标与空间频率相关联的尺度变化因子,  $F_{11}$  即为傅里叶透镜的焦距。可以证明  $F_{1\alpha}$  对于分数傅里叶变换的级联是十分重要的参数, 要满足公理(5)式必须要求  $F_{1\alpha} = F_{1\beta}$ 。即相等标准焦距的分数傅里叶变换构成同一类变换, 而级联必须在同一类变换中实行。

Lohmann 采用分析 Wigner 公布函数的剪切与合成的方法给出了利用单透镜和双透镜实现光学分数傅里叶变换两种结构, 如图 1 所示。图中  $R = \sin(\phi_\alpha), Q = \tan(\phi_\alpha/2)$ 。值得说明

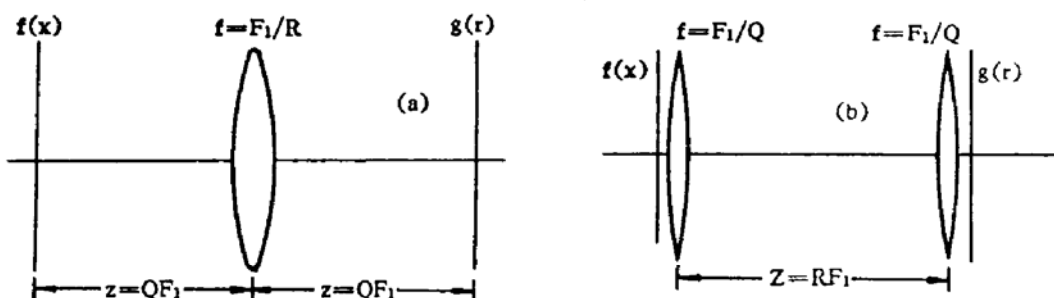


Fig. 1 Optical setups for fractional Fourier transform proposed by A. W. Lohmann, (a) single lens, (b) double lenses

的是,在这两种结构中,一旦透镜的焦距  $f$  和分数傅里叶变换的级次  $\alpha$  选定则  $F_{1\alpha}$  便也固定了,这样对由多级不等级次的分数傅里叶变换构成的光学系统便很难找到合适焦距的透镜以获得相等级次的标准焦距,如需要在  $1/3$  级次的分数傅里叶谱面滤波然后再通过  $2/3$  次变换到傅里叶谱,如果采用单透镜,前级变换的标准焦距为  $0.5 f_1$ ,而后一级变换的标准焦距则为  $0.866 f_2$ ,很难匹配两个透镜的焦距使其相等。

### 3 透镜组合实现分数傅里叶变换的结构

考虑图 2 所示由双透镜构成的光学系统,两个透镜的焦距分别为  $f_1$  和  $f_2$ ,输入函数平

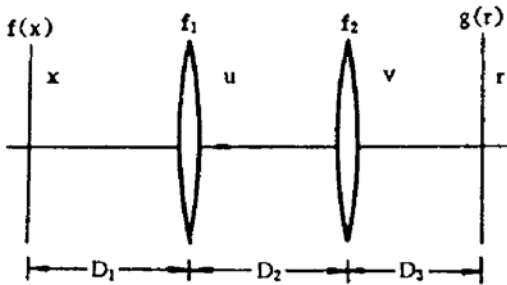


Fig. 2 General optical setup for the implementations of the fractional Fourier transform

面、透镜 1、透镜 2 及输出平面的间距分别为  $D_1$ 、 $D_2$  和  $D_3$ 。各平面的坐标分别为  $x$ 、 $u$ 、 $v$  和  $r$ 。图象在自由空间中的传播可由其与自由空间脉冲响应函数  $\psi(x, d) \equiv \exp(i\pi x^2/\lambda D)$  的卷积得到,即:

$$g(r) = \sqrt{d} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(x - r; d) dx. \quad (9)$$

其中  $d = 1/D$  为传播距离的倒数。而通过透镜的位相调制相当于乘上脉冲响应函数  $\psi^*(x; k) = \exp(-i\pi x^2/\lambda F)$ , 其中  $k = 1/f$  为透镜焦距的倒数。因而当平面波入射时,输出平面的光场分布  $g(r)$  与输入函数的关系可以表述为:

$$g(r) = c \iiint_{x, u, v} f(x) \psi(x - u; d_1) \psi^*(u, k_1) \psi(u - v, d_2) \psi^*(v, k_2) \psi(v - r, d_3) dx du dv \quad (10)$$

式中  $d_i = 1/D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $k_j = 1/f_j$  ( $j = 1, 2$ )。令  $m = d_1 - k_1 + d_2$ ,  $n = d_2 - k_2 + d_3$ ,  $c$  为复常数。重复利用脉冲响应函数  $\psi(x; d)$  的性质<sup>[4]</sup>并对  $u$  和  $v$  积分得到

$$g(r) = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(x; d_1 - \frac{nd_1^2}{mn - d_2^2} \psi(r; d_3 - \frac{nd_3^2}{mn - d_2^2} \exp(-\frac{i2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d_1 d_2 d_3}{mn - d_2^2} \cdot xr) dx \quad (11)$$

与(8)式比较,得到该系统实现光学分数傅里叶变换的条件为

$$d_1 - nd_1^2/(mn - d_2^2) = d_3 - md_3^2/(mn - d_2^2), \quad (12)$$

$$d_1 - nd_1^2/(mn - d_2^2) = \cot(\phi_\alpha)/F_{1\alpha}, \quad d_1 d_2 d_3 / (mn - d_2^2) = 1/[F_{1\alpha} \sin(\phi_\alpha)]. \quad (13)$$

$$(12) \text{ 式意味着 } d_2(k_1 + k_2)(d_1 - d_3) + d_1 d_3 (k_1 - k_2) = (d_1 - d_3) k_1 k_2. \quad (14)$$

该式给出了双透镜实现光学分数傅里叶变换时透镜焦距及各平面间距的匹配关系,从该式出发,可以分如下情形对其结构进行分析。

1) 如果  $k_1 = k = 1/f$ ,  $k_2 = 0$ , 即单透镜的情形。此时  $d_2 = \infty$ , 且  $d_1 = d_3$ 。从(13)式可以得到:

$$D_1 = D_3 = [1 - \cos(\phi_\alpha)]f; \quad F_{1\alpha} = \sin(\phi_\alpha)f. \quad (15)$$

2) 考虑  $f_1$  与  $f_2$  为凸透镜组合、且两个透镜的焦距相同时的情形,即  $k_1 = k_2 = k = 1/f$ , 不考虑  $d_2 = k/2$  的成像情形,得  $d_1 = d_3$ 。令  $D_1 = D_3 = \Delta f$ , 得到

$$D_2 = [1 - 2\Delta - \cos(\phi_\alpha)]f/(1 - \Delta), \quad F_{1\alpha} = (1 - \Delta) \tan(\phi_\alpha/2)f. \quad (16)$$

很显然当  $\Delta = 0$  时即为 Lohmann 给出的第二种结构。当  $\Delta \neq 0$  时,从以上的分析可知分数傅里叶变换同样是存在的,并且其标准焦距  $F_{1\alpha}$  不仅取决于级次,而且还随  $\Delta$  的变化而改变。因

而，通过改变  $D_1$ 、 $D_2$  和  $D_3$  的相对位置可以在一定的范围内动态调节标准焦距的大小。从(16)式可以看出，当级次为  $\alpha$  时， $\Delta$  的取值范围为从 0 到  $[1 - \cos(\phi_\alpha)]/2$ 。图 3(a) 给出了  $\Delta$  的最大值  $\Delta_{max}$  与级次之间的关系曲线。 $\Delta$  的取值范围越小，则能够实现的光学分数傅里叶变换的级次的范围越大。同时  $F_{1\alpha}$  的动态变化范围将随着  $\Delta$  和级次的减小而减小，见图 3(b)。如果级联  $\alpha$  级和  $\beta$  级分数傅里叶变换，则前级变换可采用焦距为  $f_\alpha$  的单透镜结构，而后级则可采用焦距

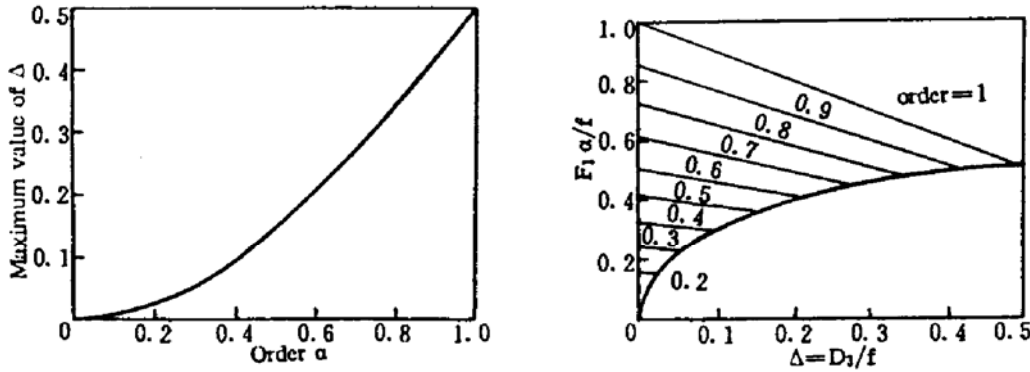


Fig. 3 The relation of the maximum value of  $\Delta$  and the fractional order  $\alpha$  (a) and the dynamical range of the normalized standard focal length  $F_{1\alpha}/f$  at different orders (b)

为  $f_\beta$  的双透镜组合结构， $\Delta$  值可由下式求出：

$$\Delta = 1 - \{ \sin(\phi_\alpha) \sin(\phi_\beta) / [1 - \cos(\phi_\beta)] \} (f_\alpha / f_\beta), \tag{17}$$

适当调节  $f_\alpha / f_\beta$  以满足  $\Delta \leq [1 - \cos(\phi_\beta)]/2$ 。

3) 考虑  $f_1$  和  $f_2$  为凹凸透镜组合时的情形，令  $k_1 = -1/f$ ,  $k_2 = 1/f$ 。当  $D_1 = \Delta f$ ,  $D_3 = Mf$  时，可以由(13)式和(14)式得到：

$$M - \Delta = 2, \quad D_2 = (1 - \cos \phi_\alpha) f / (M - 1), \quad F_{1\alpha} = (M - 1)(1 + \cos \phi_\alpha) f / M \sin \phi_\alpha. \tag{18}$$

这种结构同样可以通过改变  $D_1$ 、 $D_2$  与  $D_3$  来调节标准焦距  $F_{1\alpha}$ ，而且只要  $M$  与  $\Delta$  满足(17)式，可实现的分数傅里叶变换的级次对  $M$  没有限制。因而这种结构可获得较大的标准焦距调节范围。图 4 给出了  $M \in [2, 3]$  ( $\Delta \in [0, 1]$ ) 时的规一化标准焦距与  $M$  和级次间的关系。但当级次趋近于 0 的时候  $F_{1\alpha}$  趋近于无穷，这点与凹凸透镜组合时的情形恰好相反。

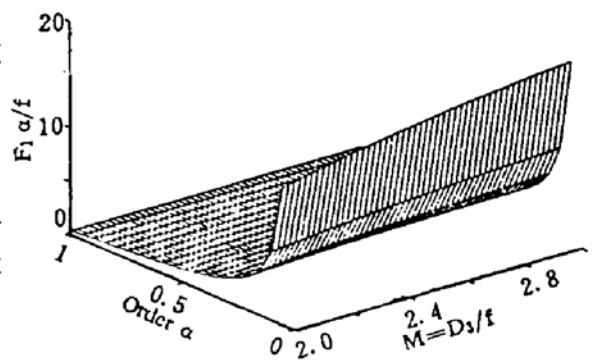


Fig. 4 The relationship of the normalized standard focal length  $F_{1\alpha}/f$  with fractional orders and  $M = D_3/f$  for concave and convex lenses combination

图 5 给出了部分实验结果。图 5(a) 和图 5(b) 给出了用一个焦距为 400 mm 的傅里叶透镜实现的级次分别为 1 和 0.4 的傅里叶变换，输入图像为一个二维矩形函数。在标准焦距不相等的情形下，不可能实现分数傅里叶变换的级联，图 5(c) 给出了利用两个焦距同为 400 mm 的傅里叶透镜实现级次为 0.6 和 0.4 两级分数傅里叶变换的级联结果，得到的并不是级次为 1 的傅里叶变换。图 5(d) 为标准焦距相同情形下两级分数傅里叶变换的级联结果。前级采用单透镜结构[如图 1(a)]实现  $\alpha = 0.6$  的分数傅里叶变换，焦距  $f_\alpha = 150$  mm,  $z = 61.8$  mm；后级由两个焦距为  $f_\beta = 400$  mm 透镜实现  $\beta = 0.4$  级的分数傅里叶变换(图 2)， $D_1 = D_3 = 26.5$  mm,  $D_2 = 25.0$  mm。得到的结果相当于一个焦距

为 121.4 mm 的单透镜实现的级次为 1 的傅里叶变换。

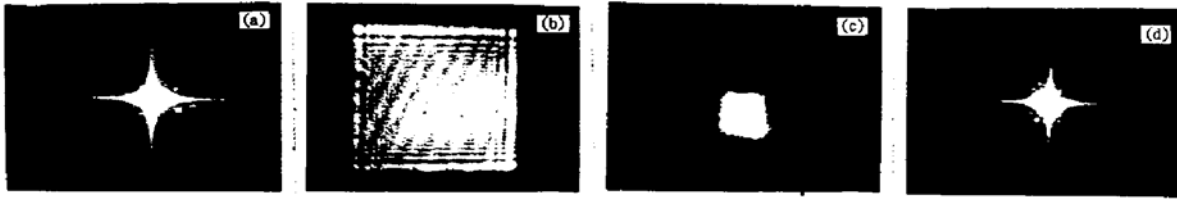


Fig. 5 Experimental results

(a) and (b) Fourier transforms of order 1 and 0.4, respectively, performed by a  $f = 400$  mm lens, (c) The cascaded two stages of fractional Fourier transforms with orders 0.4 and 0.6, respectively, performed by two lens of same focal length,  $f = 400$  mm, and (d) The cascaded two stages of fractional Fourier transforms with same standard focal length. The first stage performs order 0.6 fractional Fourier transform with a single lens  $f_a = 150$  mm, while the second stage performs order 0.4 fractional Fourier transform by double lenses with focal length of 400 mm

**结 论** 本文采用光学系统的脉冲响应方法推导了透镜组合实现光学分数傅里叶变换的结构,给出了几种较普遍的组态。分析了透镜实现光学分数傅里叶变换时的标准焦距的物理意义以及对分数傅里叶变换级联时的影响,利用这几种普遍结构给出了调节标准焦距的简单方法。本文给出了部分实验结果证明了以上分析的结论。

### 参 考 文 献

- [1] D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, Fractional Fourier transforms and their optical implementation; I. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, 10(9): 1875
- [2] A. W. Lohmann, Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, 10(10): 2181
- [3] V. Namias, The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics. *J. Inst. Math. Its Appl.*, 1980, 25(2): 241
- [4] A. VanderLugt, *Optical Signal Processing*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1992, Chapter 3, 117~127

## Optical Implementations of the Fractional Fourier Transform Using Lenses

Liu Shutian    Xu Jiandong    Zhang Yan    Li Chunfei

(Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

(Received 8 July 1994; revised 1 November 1994)

**Abstract** The optical structures for implementation of the fractional Fourier transform were analyzed based on the theory of impulse response functions of the lens combination optical systems, and the meaning of the standard focal length was discussed. Several general optical setups were provided. By using these setups, the standard focal length can be adjusted easily. It will be significant for designing a spatial variant filtering system with multiple cascaded optical fractional Fourier transformers.

**Key words** optical fractional Fourier transform, impulse response functions, optical information processing.