第 15 卷　第 10 期　　光　学　学　报　　Vol. 15, No. 10
1995 年 10 月　　ACTA OPTICA SINICA　　October, 1995

原子-光场精确解模型在绝热极限下的量子无损测量*

刘夏姬　孙昌璞
(东北师范大学理论物理研究所，长春 130024)

摘　要　研究了一个无损测量原子质心动量的精确可解模型，详细分析了无损测量的条件及无损测量的动力学过程。文中分析表明，绝热极限是实现此类模型无损测量的必要条件。最后针对此模型讨论了量子无损测量与表象之间的关系。

关键词　量子无损测量，　原子质心动量，　绝热近似。

1　引　　言

量子测量理论的主要原理早在三十年代就由薛定谔(Schrodinger)、海森堡(Heisenberg)、玻恩(Born)和冯·诺伊曼(Von. Neumann)等人建立发展起来，但直至八十年代由于技术的进步才使测量理论的各种细节在实际的实验中得以检验[1]。近年来，由于量子测量理论在光学及量子宇宙学中的应用，使其重新引起重视，并得到进一步发展[2,3]。其中量子无损测量(QND 测量)的研究，尤其引人注目[1,4,5]。

第一次测量对被测物体的待测力学量没有扰动，再次进行观测能重复前次的测量结果的测量称为量子无损测量。正是由于它的这些性质，它在实际实验中有着广泛的应用，其理论成为人们研究的热点之一。

最近，Sleator 和 Wilkens 提出了一个由光场位相性质对其中运动原子质心动量进行量子无损测量的动力学模型[6]。由于这个模型及其相关的研究[7]均应用了绝热近似，有必要从精确解的角度对这种近似在该类问题中的动力学含义进行详尽分析。本文的研究发现了绝热极限是此类模型实现量子无损测量的条件，给出了整体的有效绝热哈密顿量。为了详细分析量子无损测量过程的动力学，本文仔细研究了近似解相应的投影测量算子和条件几率，讨论了量子无损测量与表象之间的关系。

2　模型及其精确解

在与原子波长尺度可以比拟的环形腔场中，质心沿腔轴 x 方向运动的两能级原子和腔场相互作用的整个系统的哈密顿量为[6]：

---

* 国家自然科学基金资助课题。
收稿日期：1994 年 9 月 16 日；收到修改稿日期：1994 年 12 月 28 日

$$H = \frac{p^2}{2M} + \hbar\omega_0\sigma_+\sigma_- + \hbar\omega a^+ a + \hbar g[\exp(-iqx)a^+\sigma_- + \exp(iqx)a\sigma_+] \tag{1}$$

式中 x、p 分别为原子的质心位置和动量算符；$\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$、$\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ 由原子的基态 $|g\rangle$ 和激发态 $|e\rangle$ 定义；$\hbar\omega_0$ 为 $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 的能级差；a^+、a 是频率为 ω 的单模光场的产生、湮没算符。g 为原子与光场的耦合常数，q 为行波光场的圆波数($\omega = cq$)。根据 Sleator 和 Wilkens 引入的幺正变换：

$$U_i = \exp[-i\omega t(a^+a + \sigma_+\sigma_-) + iqx\sigma_+\sigma_-], \tag{2}$$

设 $|\psi(t)\rangle = U_i|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 是 H 支配薛定谔方程的解，则支配 $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 演化的哈密顿量是：

$$\left.\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{p^2}{2M} - \hbar\Delta(P)\sigma_+\sigma_- + \hbar g[a^+\sigma_- + a\sigma_+], \\ \Delta(p) &= \omega - (\omega_0 + \frac{qp}{M} + \frac{\hbar q^2}{2M}), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中包含了多普勒(Doppler)频移 qp/M。Sleator 和 Wilkens 是从(3)式出发，直接通过其绝热近似，研究原子质心动量的量子无损测量。而本文将注意到(1)式和(3)式支配的动力学模型是精确可解的。事实上，$\tilde{H}$ 中 $p^2/2M$ 和剩下的 $\tilde{H}_{JC} = \tilde{H} - p^2/2M$ 可对易，而 H_{JC} 是原子能级有效跃迁频率 $\Delta(p)$ 和动量 p 有关的 J-C 哈密顿量[8]。由此得 $H = p^2/2M + H_{JC}$ 的本征值和相应的本征函数：

$$E_0 = \frac{p^2}{2M} \qquad (\text{基态能量})$$

$$E_n(+) = \frac{p^2}{2M} - \frac{\hbar}{2}\Delta(p) + \hbar W_n, \qquad E_n(-) = \frac{p^2}{2M} - \frac{\hbar}{2}\Delta(p) - \hbar W_n \tag{4}$$

$$|0, g\rangle \qquad (\text{基态本征函数})$$

$$\left.\begin{aligned} |\phi_n(+)\rangle &= [\sin\frac{\Theta_n}{2}|n, e\rangle + \cos\frac{\Theta_n}{2}|n+1, g\rangle] \otimes |p\rangle, \\ |\phi_n(-)\rangle &= [\cos\frac{\Theta_n}{2}|n, e\rangle - \sin\frac{\Theta_n}{2}|n+1, g\rangle] \otimes |p\rangle \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$W_n = \sqrt{g^2(n+1) + \frac{\Delta^2(p)}{4}}, \qquad \mathrm{tg}\,\Theta_n(p) = \frac{2g\sqrt{n+1}}{\Delta(p)} \tag{6}$$

式中 $|p\rangle$ 为原子质心动量的本征态，$|n\rangle$ 为光场粒子数算符 a^+a 的本征态。由此，得模型的一个精确解：

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \int dp \sum_n \{[A_n(p)\exp(-\frac{i}{\hbar}E_n(+)t)|\phi_n(+)\rangle + B_n(p)\exp(-\frac{i}{\hbar}E_n(-)t)|\phi_n(-)\rangle] + C_0(p)\exp(-\frac{i}{\hbar}E_0 t)|0, g\rangle\} \otimes |p\rangle \tag{7}$$

式中 $A_n(p)$、$B_n(p)$、$C_0(p)$ 是由初始条件确定的常数。

3　绝热近似

考虑弱耦合情况。当光场很弱且失谐 ($\delta = \omega - \omega_0$) 很大，亦即 $\delta/g\sqrt{n+1} \gg 1$，有一阶近似：

$$W_n = \sqrt{g^2(n+1) + \frac{\Delta^2(p)}{4}} \simeq \frac{\Delta(p)}{2} + \frac{g^2}{\Delta(p)}(n+1),$$

$$\operatorname{tg}\Theta_n = \frac{2g\sqrt{n+1}}{\Delta(p)} \simeq 0, \qquad \Theta_n \simeq 0 \tag{8}$$

这种情况对应于文献[6]中绝热条件 $\delta \gg k\sqrt{\langle a^+a\rangle}$，于是有：

$$\left.\begin{aligned} &E_n(+) \simeq \frac{p^2}{2M} + \Omega(P)(n+1), \qquad &&E_n(-) \simeq \frac{p^2}{2M} - \hbar\Delta(p) - \Omega(p)(n+1), \\ &|\phi_n(+)\rangle \simeq |n+1,\, g\rangle \otimes |p\rangle, \qquad &&|\phi_n(-)\rangle \simeq |n,\, e\rangle \otimes |p\rangle \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中 $\Omega(p) = g^2/\Delta(p)$。从而精确解的波函数(7)式取其绝热极限为：

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(t)\rangle = \int dp\{ &\sum[A_n(p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}t[\frac{p^2}{2M}+\Omega(p)(n+1)]}|n+1,\, g\rangle \\ &+ B_n(p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}t[\frac{p^2}{2M}-\hbar\delta(p)-\Omega(p)(n+1)]}|n,\, e\rangle] \\ &+ C_0(p)\, e^{-\frac{ip^2t}{2\hbar M}}|0,\, g\rangle\} \otimes |p\rangle \end{aligned} \tag{10}$$

事实上，上述近似的本质是：在振幅中[以 $\sin(\Theta_n/2)$ 和 $\cos(\Theta_n/2)$ 形式出现]取 $g^2(n+1)/\Delta(p)$ 的零级形式，而在位相中取 $g^2(n+1)/\Delta(p)$ 的一级形式(这是由于考虑到在位相中这项以时间 t 的乘积形式出现，经足够长的时间将贡献一个有限量，是不能忽略的。)。这种振幅中取零级近似、位相中取一级近似的处理是由杨振宁教授指出的，最近作者之一(孙昌璞)与张林芝给出了这种近似的一个具体实现[11]。在这种近似下，有绝热近似哈密顿：

$$\begin{aligned} \tilde{H}_a &= \frac{p^2}{2M} - \hbar\Delta(p)\sigma_+\sigma_- - \hbar\Omega(p)a^+a\sigma_z \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2M} - \hbar\Omega(p)a^+a & 0 \\ 0 & \frac{p^2}{2M} + \hbar\Omega(p)a^+a \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{11}$$

$\tilde{H}_a$ 的第二分量正相应于文献[6]给出的在 $\delta \gg K\sqrt{a^+a}$ 条件下的近似哈密顿量。对应于原表象下绝热近似的哈密顿量为：

$$H_a = \begin{pmatrix} \begin{aligned} &\frac{(p-\hbar g)^2}{2M} - \hbar\Delta(p-\hbar q) + \hbar\Omega(p-\hbar q)a^+a \\ &\qquad + \hbar\omega a^+a + \hbar\omega \end{aligned} & 0 \\ 0 & \frac{p^2}{2M} + \hbar(\Omega(p)+\omega)a^+a \end{pmatrix} \tag{12}$$

4 量子无损测量的绝热动力学

为了通过光场的性质确定原子的质心动量。应适当选择光场的动力学量 y，研究 y 与 p 的关联可定出原子质心动量。由 Sleator 和 Wilkens 的讨论，取

$$y = (a^+ + a)/2 \tag{13}$$

通过对 y 的测量来确定 p。

取初始原子处于混合态或纯态 ρ_{init}，腔场处于 $|\psi_0\rangle$ 状态，则整体的初始状态可表达为：

$$\rho_0 = |\psi_0\rangle\ \rho_{init}\langle\psi_0| \tag{14}$$

由上一节给出的绝热近似下的哈密顿量(12)式，可知其所支配的演化矩阵为：

$$U_a(t)=\begin{pmatrix}\exp\{-i[\frac{(p-\hbar q)^2}{2\hbar M}-\Delta(p-\hbar q) \\ -\Omega(p-\hbar q)a^+a+\omega a^+a+\omega]t\} & 0 \\ 0 & \exp\{-i[\frac{p^2}{2\hbar M}+\Omega(p)a^+a+\omega a^+a]t\}\end{pmatrix} \tag{15}$$

由此得到 t 时刻原子-腔场的状态为：

$$\rho(t)=U_a(t)|\psi_0\rangle\ \rho_{init}\langle\psi_0|U_a^+ \tag{16}$$

对光场的力学量 y 进行测量。测量后得到的单支扁缩状态为：

$$\rho(y)=\langle y|\rho(t)|y\rangle/\omega(y) \tag{17}$$

式中 $\omega(y)$ 为测量光场的力学量 y 得到 y 值的几率。

设测量投影算符 $\Omega(y)=\langle y|U_0(t)|\Psi_0\rangle$[1]，将(17)式简单地表达为如下形式：

$$\rho(y)=\frac{1}{\omega(y)}\Omega(y)\rho_{init}\Omega^+(y) \tag{18}$$

由 $U_a(t)$ 的表达式可看出 $[U_a(t),\rho]=0$。由此对易关系可给出：

$$\begin{aligned}\int\omega(y)\langle p|\rho(y)|p\rangle dy&=\int\langle p|\langle y|U_a(t)|\Psi_0\rangle\ \rho_{init}\langle\Psi_0|U_a^+(t)|y\rangle|p\rangle dy\\&=\langle p|\rho_{init}|p\rangle\ \langle\Psi_0|U_0^+(t,\ p)\int|y\rangle\ \langle y|dy\ U_0(t,\ p)|\Psi_0\rangle\\&=\langle p|\rho_{init}|p\rangle\end{aligned} \tag{19}$$

此表达式说明测量后处于 $|p\rangle$ 状态的几率和测量前原子处于 $|p\rangle$ 状态的几率相同。即进行对光场力学量 y 的测量对原子的待测力学量 p 没有扰动。这符合量子无损测量的性质，所以在绝热极限下的测量是量子无损测量。而 $[U_a(t),\ p]=0$ 条件正是量子无损测量的判据。相应于文献[1]中的 $[U(t),\ q]=0$。

由于是通过对光场的力学量 y 进行观测来确定原子的动量 p 进而要知道，光场处于 y 值对应于原子动量为 p 值的几率。反映这种关系的量是条件几率 $\omega(y|p)$[1]。由条件几率的含义得到它可用投影算符表示为：

$$\omega(y|p)=\langle p|\Omega^+(y)\Omega(y)|p\rangle \tag{20}$$

当光场的初始状态是 $|\alpha\rangle$(相干态)，由(15)式及 $\Omega(y)$ 的定义式得到：

$$\Omega(y)=\begin{pmatrix}\exp[-i\frac{(p-\hbar q)^2t}{2\hbar M}]\exp[-i\omega t+i\Delta(p-\hbar q)t] \\ \langle y|\alpha\exp[i\Omega(p)t-i\omega t]\rangle & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{p^2}{2\hbar M}) \\ & \langle y|\alpha\exp[-i\Omega(p)t-i\omega t]\rangle\end{pmatrix} \tag{21}$$

再由(20)式得到：

$$\omega(y|p)=\begin{pmatrix}|\langle y|\alpha\exp[i(\Omega(p)-\omega)t]\rangle|^2 & 0 \\ 0 & |\langle y|\alpha\exp[-i(\Omega(p)+\omega)t]\rangle|^2\end{pmatrix} \tag{22}$$

由 $\omega(y|p)$ 的表达式知可通过选择相互作用时间，相干态的本征值等参数来给出一个很好的 y 与 p 的对应关系[6]。

5 讨 论

上面讨论给出了量子无损测量的条件：$[U(t), q] = 0$[1]，论述了该模型为什么在绝热近似下将实现量子无损测量。人们自然要考虑未作近似的情况。

由(1)式给出的哈密顿量可知其所支配的演化矩阵 $U(t) = \exp(-iHt)$ 与 p 不满足上述条件。所以未作此近似的测量不是无损测量，绝热近似是实现量子无损测量的必要条件。

人们注意到作 U_t 变换后的哈密顿量(3)式：

$$H = p^2/2M - \hbar\Delta(p)\sigma_+\sigma_- + \hbar g[a^+\sigma_- + \sigma_+ a]$$

显然它所支配的演化矩阵与 P 对易。由此知变换后的测量是无损测量。所以说量子无损测量与表象有关，即在这种坐标系中是量子无损测量而在另一种坐标系中可能是量子破坏测量(Quantum-Demolition Measurement)。

但(2)式变换不是一个实验可实现的坐标变换，所以变换后的测量是否为无损测量的讨论只有理论意义而对实际并无意义。

参 考 文 献

[1] V. Braginsky, F. Khallili, *Quantum Measurement*, Cambridge, Printed in Great Britain at the University Press, Cambridge 1992

[2] M. Gell-Mann, J. Hartle, Classical equation for quantum system. *Phys. Rev.* (*D*), 1993, **47**(2) : 3345～3895

[3] C. P. Sun, Quantum dynamical model for wave-function reduction in classical and macroscopic limits. *Phys. Rev.* (*A*), 1993, **48**(2) : 898～907

[4] P. Grangier, Quantum nondemolition measument experiment. *Phys. Rep.*, 1992, **219** : 121

[5] M. Marte, P. Zoller, Quantum nondemolition measument of transverse atomic position in kapitza-dirac atomic beam scattering. *Appl. Phys.* (*B*), 1992, **54**(2) : 477～485

[6] T. Sleator, M. Wilkens, Quantum-nondemolition measurement of atomic momentum. *Phys. Rev.* (*A*), 1993, **48**(3) : 3286～3289

[7] P. Storey, M. Collett, D. Walls, Atomic-position resolution by quadrature-field measurement. *Phys. Rev.* (*A*), 1993, **47**(4) : 405～412

[8] E. Jaynes, F. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, 1963, **51**(1) : 89～92

[9] 郭光灿， *量子光学*. 第一版，北京，高等教育出版社，1990年6月，35～58

[10] 彭金生， *共振荧光与超荧光*. 第一版，北京，科学出版社，1993年11月，560

[11] C. P, Sun, L. Z. Zhang, Test of quantum adiabatic approximation via exactly-solvable pynamics of high-spin precession. *Physica Scripta.*, 1995, **51**(1) : 16～18

Quantum Non-Demolition Measurement for an Exactly-Solvable Model of Atom-Light Field in Adiabatic Limits

Liu Xiaji Sun Changpu

(*Institute of Theoretical Physics, Northeast Normal University, Changchu* 130024)

(Received 16 September 1994; revised 28 December 1994)

Abstract An exactly-solvable model for quantum non-demolition measurement (QNDM) of the momentum of atomic mass-center is studied with the discussions about the conditions and the dynamic process for this QNDM. It is shown in this paper that the adiabatic conditions are necessary for the realization of this kind of QNDM. Finally, the relations between the QNDM and the picture in quantum mechanics is analyzd for this model.

Key words quantum non-demolition measurement, the momentum of atomic mass-center, adiabatic conditions.